Gilt das “ignorabimus” auch für die Mathematik ?

Ringvorlesung “Nichtwissen” des ZfW im WS 2017/18

Wolfram Pohlers
WWU Münster

16. November 2017

1 Vorbemerkungen

Der Physiologe *Emil du Bois–Reymond* hielt 1872 auf der 45. Jahresversammlung der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte eine Rede mit dem Titel *”Über die Grenzen des Naturerkennens”*, in der er die These vertrat, dass der Erkenntnisfähigkeit der Wissenschaften prinzipielle Grenzen gesetzt sind. Zitat: *Gegenüber den Räthseln der Körperwelt ist der Naturforscher längst gewöhnt, mit männlicher Entsagung sein “Ignoramus” auszusprechen. Im Rückblick auf die durchlaufene siegreiche Bahn trägt ihn dabei das stille Bewusstsein, dass, wo er jetzt nicht weiss, er wenigstens unter Umständen wissen könnte, und dereinst vielleicht wissen wird. Gegenüber dem Räthsel aber, was Materie und Kraft seien, und wie sie zu denken vermögen, muss er ein für allemal zu dem viel schwerer abzugebenden Wahrspruch sich entschliessen: “Ignorabimus”*

Hier stellt du Bois–Reymond dem eher positiv konnotierten “ignoramus” (wir wissen [noch] nicht) das “ignorabimus” gegenüber, dass ich hier überspitzt mit “wir werden [niemals] wissen” übersetzen möchte. Damit startete der Begriff des Ignorabimus seine Karriere in der Welt der Diskussionen unter Gelehrten. Mit langer Wirkung.

David Hilbert, einer der einflussreichsten, wenn nicht gar der einflussreichste Mathematiker des 20. Jahrhunderts, stellt fast dreißig Jahre später seinen berühmt gewordenen 23 ungelösten mathematischen Problemen, die er 1900 auf dem internationalen Mathematikerkongress in Paris vorstellte, folgende Worte voran: *“Die*

Überzeugung von der Lösbarkeit eines jeden mathematischen Problems ist uns ein kräftiger Ansporn während der Arbeit; wir hören in uns den steten Zuruf: Da ist ein Problem, suche die Lösung. Du kannst sie durch reines Denken finden; denn in der Mathematik gibt es kein ignorabimus."

Wieder dreißig Jahre später, in einem Vortrag gehalten 1930 in Königsberg und als Radiosendung aufgezeichnet, greift er dieses Thema wieder auf und endet mit dem Satz *"Wir müssen wissen, wir werden wissen"*. Dieser Satz, der auch auf seinem Grabstein steht, wirkt bis heute, wie ich jüngst auf einer Tagung erfahren habe. Es ist ja heute modern geworden, sich Tatoos stechen zu lassen. Ein Kollege erzählte mir dort, dass einer der jüngeren Mitarbeiter auf seinem linken Arm den Spruch "Wir müssen wissen" eintätowiert hat. Sie dürfen raten, was auf seinem rechten Arm steht.

Bevor wir uns der Frage zuwenden können, ob vielleicht in der Mathematik das Ignorabimus doch gelten könnte, müssen wir klären was Wissen in der Mathematik überhaupt bedeutet. Natürlich glauben wir alle zu wissen, dass *"Eins plus Eins gleich Zwei"* sei. Aber wissen wir das wirklich? Wenn Sie dies gegenüber einem mathematischen Erstsemester behaupten, kann es Ihnen durchaus passieren, dass Sie naseweis (das "naseweis" sein legt sich in höheren Semestern) darüber belehrt werden, dass Eins plus Eins genausogut Null sein kann. Und sie oder er hat damit gar nicht einmal Unrecht. Warum glauben wir aber dennoch zu wissen, dass "Eins plus Eins gleich Zwei" ist? Aus Erfahrung? Doch Erfahrung ist dem Selbstverständnis der Mathematik nach keine zulässige Erkenntnismethode. Mathematiker wissen erst dann, dass $1 + 1 = 2$ ist, wenn sie das auch beweisen können. Mathematik ist eine "beweisende Disziplin", wie es die Soziologin Bettina Heintz im Untertitel ihrer Habilschrift *"Das Innenleben der Mathematik"* festhält. Das "Wissen" der Mathematik besteht also in ihren bewiesenen Sätzen.

Wann aber ist ein Satz bewiesen? Offenbar erst dann, wenn wir ihn aus schon bewiesenen Sätzen logisch folgern können (wobei ich in diesem Vortrag darauf verzichte(n muss), den Begriff der logischen Folgerung genauer zu fassen, was aber mathematisch exakt möglich ist). Das darf aber keinen "regressus ad infinitum" bedeuten. Irgendwann kommen wir zu Sätzen, die sich nicht mehr beweisen lassen, sondern als gültig angenommen werden müssen. Diese Sätze sind unsere Axiome.

Wann aber kann man einen Satz als Axiom akzeptieren? Das hängt von der mathematischen Theorie ab, die wir betrachten. Es ist jedoch schwierig abstrakt zu beschreiben, was ein Wissensgebiet zu einer mathematischen Theorie macht. Wir erkennen zwar immer, wann ein Wissensgebiet der Mathematik zuzurechnen ist, dies allgemein zu definieren ist jedoch, wie gesagt, unglaublich schwierig. Ich glaube aber, nicht zu sehr zu lügen, wenn ich behaupte, dass sich Mathematik in erster Linie mit der Untersuchung abstrakter Strukturen beschäftigt.

Um nicht ins Ungefähre abzugleiten, möchte ich die Axiomenfindung am Beispiel der elementaren aber grundlegenden Struktur der natürlichen Zahlen erläutern.

2 Die Struktur der natürlichen Zahlen

Wir alle kennen die natürlichen Zahlen. Sie entstehen beim Prozess des Zählens. Die natürlichen Zahlen bilden den Träger der Struktur der natürlichen Zahlen. Neben der Identitätsrelation auf den natürlichen Zahlen haben wir gewisse Operationen, die wir mit natürlichen Zahlen vornehmen können. Wir können sie addieren und multiplizieren. (Alle anderen Grundrechenarten lassen sich aus diesen beiden ableiten.)

Unser Ziel ist es nun, die Struktur der natürlichen Zahlen durch Axiome zu beschreiben zu versuchen.

Um die Menge der natürlichen Zahlen zu beschreiben, also Namen für natürliche Zahlen einzuführen, bedienen wir uns der "Bierdeckelmethode". Wir beginnen mit dem leeren Deckel, als Namen für die 0, und fügen bei jedem weiteren Getränk einfach einen Strich hinzu und erhalten so einen neuen Deckel. Wir nennen den Deckel, bei dem ein Strich hinzugefügt wurde, den *Nachfolger* des vorhergehenden Deckels. So erhalten wir eine Folge von Deckeln 0, $0'$, $0''$, ... als Namen für natürliche Zahlen (im "wirklichen alltäglichen Leben" benutzen wir die Dezimalschreibweise als Namen für natürliche Zahlen, was wesentlich ökonomischer ist. Hier aber geht es um das Prinzip, was in weniger ökonomischer Schreibweise oft besser zu erkennen ist). Damit erhalten wir unsere ersten Axiome.

Ontologische Axiome

(A1) *Jede natürliche Zahl ist entweder* 0 *(der leere Deckel) oder Nachfolger einer natürlichen Zahl (des vorhergehenden Deckel).*

(A2) *Jede natürliche Zahl hat genau einen Nachfolger.*

Nun müssen wir noch die Operationen beschreiben, die wir auf den natürliche Zahlen ausführen können. Dazu wollen wir ruhig schon die mathematischen Symbole $+$ für Addition und $\cdot$ für die Multiplikation verwenden. Wir haben also zu beschreiben, was diese Operationen machen.

Axiome der Addition

(A3) $a + 0 = a$ und

(A4) $a + n' = (a + n)'$

Axiome der Multiplikation

(A5) $a \cdot 0 = 0$ und

(A6) $a \cdot n' = (a \cdot n) + a$

Diese Axiome reichen bereits aus, unseren naseweisen Studenten zu widerlegen und zu zeigen, dass in der Struktur der natürlichen Zahlen $1 + 1 = 2$ gilt. Wir rechnen einfach

$$1 + 1 = 0' + 0' \stackrel{\text{(A4)}}{=} (0' + 0)' \stackrel{\text{(A3)}}{=} 0'' = 2.$$

Ein wichtiges Axiom fehlt aber noch. Wie können wir nachweisen, dass eine Eigenschaft **allen** natürlichen Zahlen zukommt? Das wird sicher der Fall sein, wenn diese Eigenschaft auf die 0 zutrifft und sich stets auf den Nachfolger vererbt. Diese Tatsache lässt sich im Prinzip der vollständigen Induktion formulieren.

Axiom der Vollständige Induktion

(A7) *Sei $E(n)$ eine Eigenschaft, die der natürlichen Zahl n zukommen kann. Trifft E auf die 0 zu, d.h. gilt $E(0)$ und vererbt sich die Eigenschaft E von jeder Zahl n auch auf ihren Nachfolger n', so haben alle natürlichen Zahlen die Eigenschaft E.*

Etwas formaler ausgedrückt lautet dies

Gilt $E(0)$ und folgt aus der Annahme, dass $E(n)$ gilt, dass dann auch $E(n')$ gilt, so gilt $E(z)$ für alle natürlichen Zahlen z.

So sieht also ein Axiomensystem für die Struktur der natürlichen Zahlen aus. Auf diesen Axiomen kann man die gesamte elementare Zahlentheorie aufbauen, deren Lehrbücher ganze Buchregale füllen.

Hier ein einfaches Beispiel für ein mathematisches Theorem.

1 Satz *Addiert man zur Summe zweier natürlicher Zahlen eine Dritte hinzu, so erhält man das gleiche Ergebnis als würde man die erste Zahl zur Summe der beiden anderen hinzuzählen.*

Formal ausgedrückt heißt das

$$(a+b)+c = a+(b+c)$$

Beweis Sei $E(c)$ die Eigenschaft $(a+b)+c = a+(b+c)$. Dann gilt

$(a+b)+0 \overset{(A3)}{=} (a+b) \overset{(A3)}{=} a+(b+0)$, also $E(0)$.

Nun nehmen wir $E(c)$ an, also $(a+b)+c = a+(b+c)$. Wir testen $E(c')$.

$(a+b)+c' \overset{(A4)}{=} ((a+b)+c)' \overset{E(c)}{=} (a+(b+c))' \overset{(A4)}{=} (a+(b+c)') \overset{(A4)}{=} a+(b+c')$ also gilt $E(c')$ und mit vollständiger Induktion erhalten wir den Satz. □

3 Hilberts Programm

Wir wollen nun an Hand der Hilbertschen Liste mathematischer Probleme testen, in wie weit das “kein ignorabimus” auf die Mathematik zutrifft. Da erweisen sich bereits die ersten beiden von Hilbert angeführten offenen Probleme als kritisch. Die beiden ersten in Hilberts Liste aufgeführten Probleme waren:

1. Cantors Problem von der Mächtigkeit des Kontinuums.

2. Die Widerspruchslosigkeit der arithmetischen Axiome.

Das erste Problem will ich noch zurückstellen. Dazu benötigen wir einen noch etwas größeren Begiffsapparat. Vielleicht finde ich am Ende noch die Zeit, etwas darauf eingehen zu können.

Mit dem zweiten Problem können wir aber schon etwas anfangen, da wir ein Axiomensystem der Arithmetik bereits kennengelernt haben.

3.1 Definition Ein Axiomensystem heißt *widerspruchsfrei* wenn es nicht gleichzeitig einen Satz und dessen Negation beweist.

N.B.: Aus logischen Gründen genügt es zum Nachweis der Widerspruchslosigkeit schon zu zeigen, dass es einen Satz gibt, der sich nicht aus den Axiomen beweisen lässt.

Das “kein ignorabimus” in Hilberts Königsberger Rede war vielleicht schon nicht mehr von der gleichen Gewissheit getragen, auf die es sich noch in der Präambel seiner Pariser Rede stützen konnte. Die feste Zuversicht “Du kannst sie durch reines Denken finden” der Pariser Rede ist nun durch die Forderung “Wir müssen wissen” ersetzt. Die Grundlagen der Mathematik waren nämlich ins Gerede gekommen. Erste Zweifel an der Tragfähigkeit der mathematischen Grundlagen traten im Zusammenhang mit der Cantorschen Mengenlehre auf, insbesondere mit der Entdeckung der Russellschen Antinomie.

Die Russellsche Antinomie

Sei R die Menge der Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten. Also $R = \{s \mid s \notin s\}$. Dann erhalten wir den Widerspruch dass $R \in R$ genau dann gilt, wenn $R \notin R$ gilt.

Sie wuchsen sich zur sogenannten Grundlagenkrise aus, als Hermann Weyl in seiner Schrift “Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik” (1921) darauf hinwies, dass die Methoden, die sich in der Cantorschen Mengenlehre als problematisch erwiesen hatten, auch im Bereich der als etabliert geltenden Analysis zur Anwendung kommen. Um die Mathematik in ihrem vollen Besitzstand wiederherzustellen,[1] entwarf Hilbert ein Programm, das heute unter dem Titel “Hilbertsches Programm” firmiert. Grob zusammengefasst lässt sich Hilberts Programm auf zwei Schritte reduzieren:

- Formalisiere die gesamte Mathematik!
- Beweise mit finiten Mitteln, dass in dieser formalisierten Mathematik keine Widersprüche abgeleitet werden können!

Insbesondere auf Grund des ersten Schrittes des Hilbertschen Programmes wird Hilbert oft als “Formalist” bezeichnet. Ich halte das für falsch. Hilbert war sicherlich kein Formalist, wie seine reichhaltigen Beiträge zur Entwicklung der modernen Mathematik beweisen. Es war lediglich Hilberts Anliegen, die Mathematik in ihrem vollen Besitzstand zu erhalten und eine Formalisierung der Mathematik schien ihm dazu ein geeignetes Mittel zu sein.

[1] Aus Hilbert: “Neubegründung der Mathematik” (1922) *“[…]; ich möchte der Mathematik den alten Ruf der unanfechtbaren Wahrheit, die ihr durch die Paradoxien der Mengenlehre verloren zu gehen scheint, wiederherstellen; aber ich glaube, daß dies bei voller Erhaltung ihres Besitzstandes möglich ist.”*

4 Die Gödelschen Sätze

Ironischerweise hat ein junger österreichischer Logiker, Kurt Gödel, auf der gleichen Tagung in Königsberg, einen Tag vor (oder nach ?) Hilberts später im Radio gesendeter Rede die Bemerkung gemacht, dass er Aussagen gefunden hat, die sich innerhalb des Axiomensystems der Zahlentheorie nicht beweisen lassen. Ein Theorem, das er 1931 unter dem Titel "Über formal unentscheidbare Sätze der Principia mathematica und verwandter Systeme" publiziert. Mit diesen Sätzen stellte er Hilberts Optimismus und sogar sein ganzes Programm in Frage.

Erwähnen möchte ich hier allerdings, dass Kurt Gödel bereits ein Jahr früher eine Arbeit veröffentlicht hat, die—obwohl weniger spektakulär—von viel weitreichender Bedeutung ist als seine berühmt gewordenen Unvollständigkeitssätze. In dieser Arbeit beweist Gödel seinen Vollständigkeitssatz, dessen wesentliche Aussage darin besteht, dass sich logisches Schließen formalisieren lässt. Jeder logische Schluss lässt sich also durch formale Schlussregeln darstellen. Das ist eine der Grundlagen unserer heutigen Computertechnologie. Dieser Satz ist weniger spektakulär als seine Unvollständigkeitssätze, da er in dieser Form erwartbar war. Schon Aristoteles hatte in seinen Syllogismen versucht, ein Regelwerk für das logische Schließen aufzustellen. Die Unvollständigkeitssätze waren hingegen völlig unerwartet und eher kontraintuitiv.

Ich möchte hier keine Vorlesung über die Gödelschen Sätze halten, wegen ihrer Bedeutung für meinen Vortrag aber dennoch versuchen, sie in ihren Grundzügen darzustellen. Wie Sie sehen werden, sind diese Sätze zwar weitreichend, aber—im Gegensatz zum Vollständigkeitssatz—mathematisch nicht besonders tiefliegend.

Wesentlich für die Gödelschen Sätze ist *Selbstreferenz*, d.h. die Fähigkeit eines Axiomensystems über sich selbst sprechen zu können. Das von uns eingeführte Axiomensystem besitzt diese Fähigkeit. Um dies einzusehen erinnern wir uns eines zahlentheoretischen Satzes, den wir alle im Gymnasium kennengelernt haben. Zur Erinnerung:

4.1 Definition Eine natürliche Zahl ungleich 0 und 1 ist eine Primzahl, wenn sie selbst und 1 ihre einzigen Teiler sind.

Die Reihe der Primzahlen beginnt mit

$$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19, \ldots$$

2 Satz *Jede natürliche Zahl lässt sich in eindeutiger Weise als Produkt von Primzahlpotenzen darstellen.*

z.B. $20 = 4 \cdot 5 = 2^2 \cdot 5$ oder $36 = 3 \cdot 12 = 3 \cdot 2 \cdot 6 = 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3^2$, etc.

Diese eindeutige Primzahlzerlegung eröffnet die Möglichkeit sprachliche Sätze durch Zahlen zu kodieren.

Zunächst ordnen wir allen Buchstaben Zahlen zu

$\ulcorner A \urcorner = 0$, $\ulcorner B \urcorner = 1$, $\ulcorner C \urcorner = 2$,...

Dann kodieren wir Wörter und Wortfolgen durch Produkte von Primzahlpotenzen, z. B.

$\ulcorner AND \urcorner = \langle \ulcorner A \urcorner, \ulcorner N \urcorner, \ulcorner D \urcorner \rangle := 2^{\ulcorner A \urcorner + 1} \cdot 3^{\ulcorner N \urcorner + 1} \cdot 5^{\ulcorner D \urcorner + 1} = 2^1 \cdot 3^{14} \cdot 5^4 = 2 \cdot 4782969 \cdot 625 = 5.978.711.350$,

wobei wir darauf achten müssen, dass kein Exponent 0 auftritt (daher das $+1$), da ja $p^0 = 1$ für jede Primzahl p gilt und somit die Eindeutigkeit der Kodierung verloren ginge.

Damit können wir jeden sprachlichen Satz und insbesondere auch jede Formel A in der Sprache der Zahlentheorie durch eine natürliche Zahl $\ulcorner A \urcorner$ kodieren. $\ulcorner A \urcorner$ heißt die *Gödelnummer* von A. Aus der Gödelnummer $\ulcorner A \urcorner$ eines Satzes können wir über ihre eindeutige Primzahlzerlegung den Satz A zurückgewinnen. Damit sind zahlentheoretische Axiomensysteme selbstreferent, d.h. sie können Aussagen ihrer Metasprache (also zahlentheoretische Sätze) durch ihre Grundobjekte (also Namen für natürliche Zahlen) ausdrücken.

Als eine erste Anwendung der "Gödelisierung" erhalten wir ein Prädikat, das die Beweisbarkeit in einem Axiomensystem ausdrückt. Sei also *Ax* ein Axiomensystem, das unser Axiomensystem der Zahlentheorie umfasst. Ist ein Satz A in diesem Axiomensystem beweisbar, so erhalten wir mit Hilfe des Gödelschen **Vollständigkeitssatzes** eine Folge von Formeln

$$A_0, A_1, A_2, \ldots, A$$

so, dass jede der Formeln A_i entweder ein Axiom des Axiomensystems *Ax* ist oder sich durch einen (formalen) logischen Schluss aus Formeln A_j mit Indizes $j < i$ erschließen lässt. Die Tatsache, dass die Formeln in der Folge $A_0, \ldots, A$ eine korrekte Beweiskette bilden ist völlig formal nachprüfbar und kann beispielsweise von einem Computer überprüft werden. Nun kodieren wir die Formelfolge in eine Zahl

$$a = \langle \ulcorner A_0 \urcorner, \ulcorner A_1 \urcorner \dots, \ulcorner A \urcorner \rangle$$

und erhalten so eine Formel *Bew*$(a, \ulcorner A \urcorner)$ in der Sprache der Zahlentheorie, die ausdrückt, dass a einen Beweis der Formel A kodiert. Die Richtigkeit des Beweisprädikats ist sehr einfach zu entscheiden. Wir haben lediglich a zu dekodieren und dann zu überprüfen, ob die dekodierte Formelfolge einen korrekten Beweis von A darstellt. Im Prinzip könnten wir das einem Computer überlassen. Insbesondere kann die Überprüfung schon in unserem zahlentheoretischen Axiomensystem formalisiert werden.

Die zweite wesentliche Grundlage der Unvollständigkeitssätze ist der Fixpunktsatz für selbstreferente Systeme. Dies ist ein grundlegender rein kombinatorischer Satz, der für alle selbstreferenten Systeme gilt und wesentlich für viele Anwendungen in der Informatik ist.[2] Angewendet auf die Sprache der Zahlentheorie lautet er wie folgt.

3 Satz (Fixpunktsatz der Arithmetik) *Ist $F(c)$ eine Formel in der Sprache der Zahlentheorie, so gibt es eine Formel A in der Sprache der Zahlentheorie mit*

$$A \equiv F(\ulcorner A \urcorner).$$

Diesen Fixpunktsatz wenden wir nun auf die Formel $\neg(\exists x)$*Bew*(x, c) an, die besagt, dass es keinen Beweis der Formel mit Kode c gibt. [3] Dies liefert uns eine Formel

$$G \equiv \neg(\exists x)Bew(x, \ulcorner G \urcorner)$$

und damit gilt auch

$$\neg G \equiv (\exists x)Bew(x, \ulcorner G \urcorner).$$

4 Satz (Erster Gödelscher Unvollständigkeitssatz) *Ist Ax ein widerspruchsfreies Axiomensystem, das das Axiomensystem der Zahlentheorie umfasst, so gilt weder Ax $\vdash G$ noch Ax $\vdash \neg G$.*[4]

Beweis [5]Wäre G in *Ax* beweisbar, so erhielten wir einen formalen Beweis

[2] Auch Computer (oder deren Idealisierungen als Turing– oder Registermaschinen) sind selbstreferente Systeme. Jedes Programm kann durch eine Zahl kodiert werden.

[3] Der Quantor $(\exists x)$ ist zu lesen als *"es gibt eine Zahl x"*

[4] Mit dem Zeichen $\vdash$ notieren wir formale Beweisbarkeit.

[5] Der Beweis ist hier natürlich nur eine Skizze

$$A_0, A_1, \ldots, G.$$

Den kodieren wir in eine Zahl $a = \langle \ulcorner A_0 \urcorner, \ldots, \ulcorner G \urcorner \rangle$. Dann erhalten wir $\vdash$ *Bew*$(a, \ulcorner G \urcorner)$ und damit $\vdash (\exists x)$*Bew*$(x, \ulcorner G \urcorner)$, d.h. $\vdash \neg G$, denn die Zahl a ist ja ein Beispiel für x. Widerspruch.

Wäre andererseits $\neg G$ beweisbar, so wäre $\neg G$ also $(\exists x)$*Bew*$(x, \ulcorner G \urcorner)$ in der Struktur der natürlichen Zahlen wahr. Damit gäbe es aber eine natürliche Zahl a mit *Bew*$(a, \ulcorner G \urcorner)$. Dekodieren wir diese Zahl, so erhalten wir eine Folge A_0, A_1,..., G von Formeln, die einen formalen Beweis von G bilden. Widerspruch. Damit müsste das Axiomensystem *Ax*, im Gegensatz zu unserer Voraussetzung, widerspruchsvoll sein. □

Durch "genaueres Hinsehen" lässt sich nun feststellen, dass für den Gödelsatz, der ja durch

$$G \equiv \neg(\exists x)\textit{Bew}(, \ulcorner G \urcorner)$$

definiert war, sogar

$$G \equiv \neg(\exists x)\textit{Bew}(x, \ulcorner 0 = 1 \urcorner) \tag{1}$$

gilt, und diese Äquivalenz schon im Axiomensystem der Zahlentheorie beweisbar ist. Damit ist G zu der Aussage äquivalent, dass es eine Formel gibt, nämlich die Formel $(0 = 1)$, die im Axiomensystem *Ax* nicht beweisbar ist. Das ist aber die Aussage, dass das Axiomensystem *Ax* widerspruchsfrei ist, wie wir es im N.B. zur Definition der Widerspruchsfreiheit festgehalten haben. Da *Ax* das Axiomensystem der Zahlentheorie umfassen soll, ist die Äquivalenz (1) auch in *Ax* beweisbar. Wir erhalten somit den zweiten Gödelschen Unvollständigkeitssatz.

5 Satz (Zweiter Gödelscher Unvollständigkeitssatz) *Ist Ax ein widerspruchsfreies Axiomensystem, das die Zahlentheorie umfasst, so gilt*

$$\textit{Ax} \vdash G \equiv \neg(\exists x)\textit{Bew}(x, \ulcorner 0 = 1 \urcorner).$$

Zusammen mit dem ersten Unvollständigkeitssatz erhalten wir damit, dass kein widerspruchsfreies Axiomensystem, das die Zahlentheorie umfasst, seine eigene Widerspruchsfreiheit beweisen kann.

Wir lernen also aus den Gödelschen Sätzen, dass sich die Widerspruchsfreiheit eines Axiomensystems nicht im Axiomensystem selbst nachweisen lässt. Damit erhalten wir eine hierarchische Ordnung von Axiomensystemen wie in Abbildung 1 dargestellt. Dabei beweist das höherstehende Axiomensystem die Widerspruchsfreiheit aller darunterstehenden Axiomensysteme. Nur die Konsistenz der endlichen Kombinatorik lässt sich mit finiten Mitteln zeigen. Das bedeutet aber einen

- ZF(C) plus größere Kardinalzahlen
- ZF(C) plus große Kardinalzahlen
- ZF(C) (Mengenlehre)
- PA (Zahlentheorie)
- PRA (endliche Kombinatorik)

Abbildung 1: Die Gödel Hierarchie der Axiomensysteme

"progressus ad infinitum". Die Widerspruchsfreiheit der Axiomensysteme oberhalb von PRA kann daher niemals zum gesicherten (d.h. beweisbaren) Wissen der Mathematik gehören. Damit haben wir ein "ignorabimus" in der Mathematik. Es ist sogar noch weitergehend: *Die Mathematik ist in der Lage ihr eigenes "ignorabimus" beweisen zu können.*

5 Ausblick

Welche Auswirkung hat nun diese Tatsache auf die Entwicklung der Mathematik? Ich möchte hier kühn behaupten "keine" oder zumindest "so gut wie keine". Die Mathematik teilt hier das Schicksal fast aller Wissenschaften, dass sie ihre eigene Konsistenz nicht beweisen kann. Doch tut das der Mathematik irgendeinen Abbruch? Bislang hat man innerhalb der gängigen Axiomensysteme keinen Widerspruch entdeckt, der sich nicht in befriedigender Weise auflösen ließ—wie z.B. die Russellsche Antinomie—und Mathematik ist sehr erfolgreich. Die Grundlagenkrise hat sich so heute mehr oder minder erledigt. Das ist nicht zuletzt auch das Verdienst der im Rahmen der mathematischen Logik entwickelten Mengenlehre, deren Sprache sich zur "lingua franca" der Mathematik entwickelt hat. So gut wie alle mathematischen Theorien lassen sich in der Sprache der Mengenlehre entwickeln und innerhalb des Axiomensystems ZFC (Zermelo–Fraenkel set theory with Axiom of Choice) formalisieren. Kaum ein "main–stream" Mathematiker bezweifelt die Konsistenz von ZFC.

Als Randbemerkung sei erwähnt, dass sich im Programm der “reverse mathematics” zeigen lässt, dass ein Gutteil der Mathematik (mein Kollege Stephen Simpson von der Vanderbilt University behauptet 85%) in Bereichen unterhalb des Axiomensystems PA formalisierbar ist, deren Widerspruchsfreiheit finit nachweisbar ist. Allerdings erfordert dies zuweilen einen erheblichen Aufwand.

Was jedoch durch die Diskussionen um die Grundlagenkrise der Mathematik erreicht wurde, war die Entwicklung der mathematischen Logik und die Durchsetzung der axiomatischen Methode in der gesamten Mathematik im Laufe der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts. David Hilbert hatte daran einen wesentlichen Anteil.[6] Diese hat die Mathematik nachhaltig geprägt und hat einen großen Anteil daran, dass Mathematik heute so viel besser lehrbar geworden ist.

Doch zurück zum “ignorabimus”. Der Gödelsatz mit seiner Aussage *“ich bin nicht beweisbar”* wirkt durch seine Selbstreferenz doch recht konstruiert und gehört so eigentlich nicht zu den mathematischen Sätzen, die “in der Natur” vorkommen. Ich erinnere mich an eine Diskussion, die ich noch in München mit einem Experimentalphysiker[7] geführt habe, in der der Satz fiel “Lassen wir doch Spitzfindigkeiten wie den Gödelschen Satz beiseite”.

Wie sieht es also mit dem “ignorabimus” in der Mathematik aus, wenn wir diese “Spitzfindigkeiten” beiseite lassen? Natürlich gibt es eine Menge von Problemen, die ungelöst sind. Die Frage ist, ob sie *noch* ungelöst sind oder prinzipiell unlösbar sind. Wobei eine mathematische Lösung durchaus auch darin bestehen kann, die Unlösbarkeit eines Problems zu beweisen. Es kann aber auch Probleme geben, die potenziell unlösbar sein könnten, von denen es aber auch nicht klar ist, ob sich nicht doch noch ein Beweis finden lässt. Ein solches Beispiel könnte die Goldbachvermutung sein.[8]

Die Goldbachvermutung

Jede gerade Zahl größer als 2 ist Summer zweier Primzahlen.

Diese Vermutung wurde, soweit ich weiß, für alle Zahlen kleiner als $4 \cdot 10^{18}$ bestätigt. Es kann nun sein, dass diese Behauptung wahr ist, (d.h. in der Struktur der natürlichen Zahlen richtig ist), aber für jede Zahl n ein völlig neuer Beweis erforderlich ist. Da wir keine unendlich langen Beweise führen können, haben wir dann keine Möglichkeit diesen Satz jemals zu beweisen. Die Negation der Gold-

[6] Vgl. seinen Vortrag “Axiomatisches Denken” 1917 in Zürich.
[7] Wenn ich mich recht erinnere war es Alfred Faessler.
[8] Die Hilbert in seinem 8. Problem (Primzahlprobleme) erwähnt.

bachvermutung, *"es gibt eine gerade Zahl größer als 2, die* **nicht** *Summe von zwei Primzahlen ist"*, ist ein positiv entscheidbares Problem.[9] Wenn die Goldbachvermutung falsch ist (also ihre Negation wahr ist), so werden wir in endlich vielen Schritten ein Beispiel für eine gerade Zahl finden, die nicht Summe zweier Primzahlen ist. Aber das hilft uns auch nicht weiter. Ist nämlich die Goldbachvermutung wahr, so werden wir niemals eine solche Zahl finden. Beim Prozess des Suchens können wir aber zu keinem Zeitpunkt wissen, ob wir nicht doch vielleicht später eine finden. Bis zur Zahl $4 \cdot 10^{18}$ haben wir noch keine gefunden, aber was ist 10^{18} angesichts der unendlich vielen natürlichen Zahlen?

Auf der anderen Seite ist es ebenfalls möglich, dass ein Beweis gefunden werden kann, wie es bei der großen Fermatschen Vermutung[10] geschehen ist, die 1994 von Andrew Wiles und Richard Taylor bewiesen wurde. (Nach einem noch lückenhaften ersten Beweisversuch 1993). Die Hilbertsche Parole des "kein ignorabimus" ist daher immer noch die wesentliche Triebfeder aller mathematischer Forschung.

Leider ist die Zeit nun doch so weit fortgeschritten, dass ich nicht mehr dazu komme, Ihnen etwas über das erste Hilbertsche Problem zu berichten. Dieses hat sich als unabhängig von den bekannten Axiomensystemen der Mengenlehre erwiesen und kann auch nicht so ohne weiteres durch die Annahme der Existenz großer Kardinalzahlen entschieden werden. Daher eröffnen sich hier völlig andere Aspekte des "ignorabimus", auf die ich vielleicht ein anderes Mal zurückkommen kann.

[9] Positiv entscheidbare Probleme sind Probleme, die sich entscheiden lassen, wenn sie wahr sind (daher positiv entscheidbar).

[10] Deren logische Komplexität von ähnlichem Typus ist.