

# Mathematik und Bildung

## Eine historisch-philosophische Spurensuche

Gregor Nickel

Universität Siegen

6. Juni 2019 — WWU Münster

# I. Mathematische Bildung

## Bildung

[D]er Rationalisierungszwang der industriellen Gesellschaft [hat] zusammen mit der Verschulung aller Ausbildungswege (...) einer Formalisierung und Nivellierung des B.-Begriffs zu einem pragmatischen terminus technicus der Verwaltungssprache Vorschub geleistet. So in der Tendenz der Wendung 'B.-Ökonomie', 'B.-Katastrophe', 'B.-Planung' (...) oder in den Modellvorstellungen einer kybernetischen Pädagogik.

E. LICHTENSTEIN: "BILDUNG." IN: HISTORISCHES WÖRTERBUCH DER PHILOSOPHIE 1971

# I. Mathematische Bildung

## Bildungssteuerung und Mathematik

[D]er Rationalisierungszwang der industriellen Gesellschaft [hat] zusammen mit der Verschulung aller Ausbildungswege (...) einer Formalisierung und Nivellierung des B.-Begriffs zu einem pragmatischen terminus technicus der Verwaltungssprache Vorschub geleistet. So in der Tendenz der Wendung 'B.-Ökonomie', 'B.-Katastrophe', 'B.-Planung' (...) oder in den Modellvorstellungen einer kybernetischen Pädagogik.

E. LICHTENSTEIN: "BILDUNG." IN: HISTORISCHES WÖRTERBUCH DER PHILOSOPHIE 1971

Mathematik:

- als *Hilfsmittel* und
- als *Gegenstand* der Bildungsdiagnose und -steuerung

# I. Mathematische Bildung

## Bildung und Mathematikunterricht

Es ist für jeden mathematisch Gebildeten offensichtlich, daß die Herleitung des mathematischen Schulstoffs aus alltäglichen oder naiv zugänglichen Anwendungsinteressen nur gelegentlich gelingen kann und daß die Legitimität der üblichen Sekundarstufenmathematik allein aus solchen Interessen unsinnige Vorstellungen von Mathematik und ihrer gesellschaftlichen Bedeutung bestärken würde. Die Mathematik oberhalb der Grundschule (...) ist in ihrer Substanz nicht 'lebensnäher' als Newtons Physik, Marxsche Wirtschaftstheorie, Goethes Faust oder Beethovens Neunte.

LUTZ FÜHRER: PÄDAGOGIK DES MATHEMATIKUNTERRICHTS. WIESBADEN 1997.

# I. Mathematische Bildung

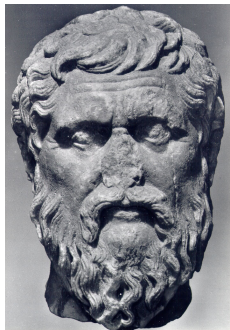
## Bildung

[Der B.-Begriff wird] zwischen 1770 und 1830 (...) zum Leitbegriff eines in der geschichtlichen Situation des Übergangs zu einer offenen Gesellschaft sozial ermöglichten Ideals geistiger Individualität, freier Geselligkeit und ideennormativer Selbstbestimmung einer bürgerlichen Oberschicht der 'Gebildeten'. (...)

[D]er Rationalisierungszwang der industriellen Gesellschaft [hat] zusammen mit der Verschulung aller Ausbildungswege (...) einer Formalisierung und Nivellierung des B.-Begriffs zu einem pragmatischen terminus technicus der Verwaltungssprache Vorschub geleistet. So in der Tendenz der Wendung 'B.-Ökonomie', 'B.-Katastrophe', 'B.-Planung' (...) oder in den Modellvorstellungen einer kybernetischen Pädagogik.

E. LICHTENSTEIN: "BILDUNG." IN: HISTORISCHES WÖRTERBUCH DER PHILOSOPHIE 1971

## II. Platon – Mathematische Bildung als Vorspiel zur gerechten Staats- und Seelenführung



(427-347 v.Chr.)

- *Menon*: Lernen ist möglich
- *Phaidon*: Philosophie ist mehr als Mechanik
- *Nomoi*: Mathematik für Ökonomie und Verandestraining, aber nicht ohne Ethos!
- *Politeia*: Mathematik zur Staats- und Seelenführung

## II. Platon – Mathematische Bildung als Vorspiel zur gerechten Staats- und Seelenführung

*Nomoi* — Ökonomie und Verstandestraining, aber nicht ohne Ethos!

Für die Verwaltung des Hauswesens und des Staates (...) hat kein Unterrichtsgegenstand so große Bedeutung wie die Beschäftigung mit den Zahlen; das wichtigste aber ist, daß sie den von Natur schläfrigen und lernfaulen Menschen aufweckt und ihn lernbegierig, gedächtnisstark und scharfsinnig macht (...) All diese Kenntnisse werden sich, wenn jemand (...) die niedrige und geldgierige Gesinnung aus den Seelen entfernt, (...) als schöne und zweckmäßige Bildungsgegenstände erweisen; wo aber nicht, dann wird man unversehens statt der Weisheit das erzeugen, was man Verschlagenheit nennt.

*Nomoi* 747B-C

## II. Platon – Mathematische Bildung als Vorspiel zur gerechten Staats- und Seelenführung

### *Politeia* — Universalität der Mathematik

[L]äß uns etwas von dem nehmen, (...) dessen alle Künste und Wissenschaften noch dazu bedürfen, was auch jeder zuerst lernen muß (...) Zahl und Rechnung. Oder ist es damit nicht so, daß jegliche Kunst und Wissenschaft daran teilnehmen muß?

*Politeia* 522B-C



## II. Platon – Mathematische Bildung als Vorspiel zur gerechten Staats- und Seelenführung

### *Politeia* — Mathematik und Kriegskunst

[L]äß uns etwas von dem nehmen, (...) dessen alle Künste und Wissenschaften noch dazu bedürfen, was auch jeder zuerst lernen muß (...) Zahl und Rechnung. Oder ist es damit nicht so, daß jegliche Kunst und Wissenschaft daran teilnehmen muß? (...) [U]m Lager abzustecken, feste Plätze einzunehmen, das Heer zusammenzuziehn oder auszudehnen und für alles, was die Richtung des Heeres in den Gefechten selbst und auf den Märschen betrifft, wird es einen großen Unterschied machen, ob einer ein Geometer ist oder nicht.

*Politeia* 522B-C & 526D

## II. Platon – Mathematische Bildung als Vorspiel zur gerechten Staats- und Seelenführung

*Politeia* — Mathematik auf dem Weg zur Philosophie

Denn offenbar ist die Geometrie die Kenntnis des Immerseienden. – Also (...) wäre sie auch eine Leitung der Seele zum Wesen hin und ein Bildungsmittel philosophischer Gesinnung.

*Politeia* 527B-C

## II. Platon – Mathematische Bildung als Vorspiel zur gerechten Staats- und Seelenführung

### *Politeia* — Mathematik auf dem Weg zur Philosophie

[Mathematik bildet, wenn sie] die Seele in die Höhe führt und sie nötigt mit den Zahlen selbst sich zu beschäftigen, nimmer zufrieden, wenn einer ihr Zahlen, welche sichtbare und greifliche Körper haben, vorhält und darüber redet. (...)

Denn offenbar ist die Geometrie die Kenntnis des Immerseienden. – Also (...) wäre sie auch eine Leitung der Seele zum Wesen hin und ein Bildungsmittel philosophischer Gesinnung.

*Politeia* 525D-E & 527B-C

## II. Platon – Mathematische Bildung als Vorspiel zur gerechten Staats- und Seelenführung

*Politeia* — Mathematik niemals als Drill!

Was nun zum Rechnen und zur Geometrie und zu allen den Vorübungen gehört, die vor der Philosophie hergehn sollen, das müssen wir ihnen (...) vorlegen, indem wir jedoch die Form der Belehrung nicht als einen Zwang zum Lernen einrichten (...) weil kein Freier irgend eine Kenntnis auf knechtische Art lernen darf. Denn die körperlichen Anstrengungen, wenn sie auch mit Gewalt geübt werden, machen den Leib um nichts schlechter, in der Seele aber ist keine erzwungene Kenntnis bleibend. (...) Nicht also mit Gewalt, sondern spielend beschäftige die Knaben mit diesen Kenntnissen, damit du auch desto besser sehn könntest, wohin ein jeder von Natur sich neigt.

*Politeia* 536D-537A

### III. Cusanus – Mathematik als Spielfeld der Ratio und Enigma für die Reflexion des Intellekts



(1401-1464)

# III. Cusanus – Mathematik als Spielfeld der Ratio und Enigma für die Reflexion des Intellekts

## Bildung

Der Ursprung des B.-begriffs im philosophischen Gebrauch liegt (...) nicht im humanistischen und pädagogischen, sondern im mystisch-theologischen und naturphilosophisch-spekulativen Bedeutungsfeld.(...)

[Der B.-Begriff wird] zwischen 1770 und 1830 (...) zum Leitbegriff eines in der geschichtlichen Situation des Übergangs zu einer offenen Gesellschaft sozial ermöglichten Ideals geistiger Individualität, freier Geselligkeit und ideennormativer Selbstbestimmung einer bürgerlichen Oberschicht der Gebildeten'. (...) [D]er Rationalisierungszwang der industriellen Gesellschaft [hat] zusammen mit der Verschulung aller Ausbildungswege (...) einer Formalisierung und Nivellierung des B.-Begriffs zu einem pragmatischen, vor allem auch anthropologisch indifferenten terminus technicus der Verwaltungssprache Vorschub geleistet.

E. LICHTENSTEIN: BILDUNG. IN: HISTORISCHES WÖRTERBUCH DER PHILOSOPHIE 1971

### III.1. Mathematik im Gefüge des menschlichen Geistes (*Mens*)

### III.1. Mathematik im Gefüge des menschlichen Geistes (*Mens*)

- ① Sinne (*Sensus*); rein positiv: “Der Sinn nimmt wahr und unterscheidet nicht. Jede Unterscheidung stammt aus dem Verstand. (...) Der Sinn stellt nur fest, daß etwas sinnlich Wahrnehmbares da ist, aber nicht, ob dieses oder jenes.”

NIKOLAUS VON KUES: *De coniecturis* (1442/43)



### III.1. Mathematik im Gefüge des menschlichen Geistes (*Mens*)

- ① Sinne (*Sensus*); rein positiv: “Der Sinn nimmt wahr und unterscheidet nicht. Jede Unterscheidung stammt aus dem Verstand. (...) Der Sinn stellt nur fest, daß etwas sinnlich Wahrnehmbares da ist, aber nicht, ob dieses oder jenes.”
- ③ Verstand (*Ratio*); unterscheidet Position von Negation: “So benutzt der Verstand den Sinn als Werkzeug, um die Sinnendinge zu unterscheiden; doch er selbst ist es, der im Sinn das Sinnending unterscheidet.”

NIKOLAUS VON KUES: *De coniecturis* (1442/43)

### III.1. Mathematik im Gefüge des menschlichen Geistes (*Mens*)

- ① Sinne (*Sensus*); rein positiv: “Der Sinn nimmt wahr und unterscheidet nicht. Jede Unterscheidung stammt aus dem Verstand. (...) Der Sinn stellt nur fest, daß etwas sinnlich Wahrnehmbares da ist, aber nicht, ob dieses oder jenes.”
- ③ Verstand (*Ratio*); unterscheidet Position von Negation: “So benutzt der Verstand den Sinn als Werkzeug, um die Sinnendinge zu unterscheiden; doch er selbst ist es, der im Sinn das Sinnending unterscheidet.”
- ④ Vernunft (*Intellectus*); fasst Position und Negation zu einer Einheit zusammen. Der Geist “(...) eint die Andersheiten des sinnlich Wahrgenommenen im Vorstellungsvermögen, eint die Verschiedenheit der Vorstellungen im Verstand, und eint schließlich die verschiedene Andersheit der Verstandes-Begriffe in der einfachen Einheit des Intellekts.”

NIKOLAUS VON KUES: *De coniecturis* (1442/43)

### III.1. Mathematik im Gefüge des menschlichen Geistes (*Mens*)

- ① Sinne (*Sensus*); rein positiv: "Der Sinn nimmt wahr und unterscheidet nicht. Jede Unterscheidung stammt aus dem Verstand. (...) Der Sinn stellt nur fest, daß etwas sinnlich Wahrnehmbares da ist, aber nicht, ob dieses oder jenes."
- ② Einbildungskraft (*Imaginatio*) **Mathematik**
- ③ Verstand (*Ratio*); unterscheidet Position von Negation: "So benutzt der Verstand den Sinn als Werkzeug, um die Sinnendinge zu unterscheiden; doch er selbst ist es, der im Sinn das Sinnending unterscheidet." **Mathematik**
- ④ Vernunft (*Intellectus*); fasst Position und Negation zu einer Einheit zusammen. Der Geist "(...) eint die Andersheiten des sinnlich Wahrgenommenen im Vorstellungsvermögen, eint die Verschiedenheit der Vorstellungen im Verstand, und eint schließlich die verschiedene Andersheit der Verstandes-Begriffe in der einfachen Einheit des Intellekts."

NIKOLAUS VON KUES: *De coniecturis* (1442/43)

### III.1. Mathematik im Gefüge des menschlichen Geistes (*Mens*)

#### Mathematik, die ratio und das Widerspruchsprinzip

Alles, was man [in der Mathematik] als wahr beweist, ist deshalb wahr, weil sonst das Zusammenfallen der Gegensätze unterschoben würde, und das hieße den Bereich der ratio verlassen. (...) Und weil in der Mathematik dieser Grundsatz gültig ist, sind ihre Beweise die rationalen Beweise schlechthin und die wahrsten im Sinne der ratio; die ratio erfreut sich an ihnen gleichsam wie an der Ausfaltung ihrer eigenen Kraft. (...) Daher fällt diese Wissenschaft manchen Leuten auch ohne Lehrer leicht, nämlich Leuten, deren *ratio* weder allzu sehr im Intellekt aufgegangen, noch im Schatten der Sinnendinge eingeschränkt ist.

NIKOLAUS VON KUES: *De coniecturis* (1442/43)

## III.2. Mathematik zur Vermessung der Welt. . .

### Ungenauigkeit

Mit Hilfe der Ähnlichkeitsbeziehung kann (...) ein endlicher Geist die Wahrheit der Dinge nicht genau erreichen. Der Geist also (...) erfaßt die Wahrheit niemals so genau, daß sie nicht ins Unendliche immer genauer erfaßt werden könnte. Er verhält sich zur Wahrheit wie das Polygon zum Kreis.

NIKOLAUS VON KUES: *de docta ignorantia* (1442)

## III.2. Mathematik zur Vermessung der Welt... und des Geistes

### Ungenauigkeit

Mit Hilfe der Ähnlichkeitsbeziehung kann (...) ein endlicher Geist die Wahrheit der Dinge nicht genau erreichen. Der Geist also (...) erfaßt die Wahrheit niemals so genau, daß sie nicht ins Unendliche immer genauer erfaßt werden könnte. Er verhält sich zur Wahrheit wie das Polygon zum Kreis.

NIKOLAUS VON KUES: *de docta ignorantia* (1442)

### Selbsterkenntnis

Der Geist ist ein lebendiges Maß, das an sein eigenes Fassungsvermögen dadurch herankommt, daß es anderes mißt. Er tut alles, um sich selbst zu erkennen.

NIKOLAUS VON KUES: *de mente* (1450)

## IV. Hermann Weyl und David Hilbert: Moderne Freiheit Mathematik



(1885-1955)



(1862-1942)

## IV.1 Hermann Weyl: Mathematik als freie Symbolkonstruktionen



[A]nstatt eines realen räumlich-zeitlichen-materiellen Seins behalten wir nur eine Konstruktion in reinen Symbolen übrig. (...) Ich werde mich dann zur Mathematik wenden, um Auskunft über Sinn und Ursprung der Symbole zu erhalten, und werde da den Menschen, sofern er schöpferischer Geist ist, als den Baumeister der Symbolwelt entdecken. (...) Nur indem die Freiheit des Geistes sich selber bindet an das Gesetz, begreift der Geist nachkonstruierend die Gebundenheit der Welt und seines eigenen Daseins in der Welt. (...)

HERMANN WEYL: *Wissenschaft als symbolische Konstruktion des Menschen*.  
ERANOS JAHRBUCH 1948.



## IV.2 David Hilbert: *Wissen und mathematisches Denken.*

## IV.2 David Hilbert: *Wissen und mathematisches Denken*.

[E]in gewisses Maß an musikalischer Begabung, welches dazu befähigt, Freude an der Musik zu empfinden, und bei richtiger Anleitung auch Verständnis dafür zu gewinnen, muß geradezu als Regel angesehen werden (...) So besitzt erst recht jeder normal begabte Schüler ein genügendes Maß geistiger Fähigkeiten für den mathematischen Unterricht. (...)

DAVID HILBERT: *Wissen und mathematisches Denken*. VORLESUNG 1922.

## IV.2 David Hilbert: *Wissen und mathematisches Denken.*

[E]in gewisses Maß an musikalischer Begabung, welches dazu befähigt, Freude an der Musik zu empfinden, und bei richtiger Anleitung auch Verständnis dafür zu gewinnen, muß geradezu als Regel angesehen werden (...) So besitzt erst recht jeder normal begabte Schüler ein genügendes Maß geistiger Fähigkeiten für den mathematischen Unterricht. (...)

Unsere ganze gegenwärtige Kultur, soweit sie auf der geistigen Durchdringung und Dienstbarmachung der Natur beruht, findet ihre Grundlage in der Mathematik. (...) Trotzdem haben alle großen Mathematiker der Ansicht, die Anwendungen als Wertmesser für die Mathematik gelten zu lassen, heftig widersprochen.

DAVID HILBERT: *Wissen und mathematisches Denken.* VORLESUNG 1922.

## IV.2 David Hilbert: *Wissen und mathematisches Denken.*

[E]in gewisses Maß an musikalischer Begabung, welches dazu befähigt, Freude an der Musik zu empfinden, und bei richtiger Anleitung auch Verständnis dafür zu gewinnen, muß geradezu als Regel angesehen werden (...) So besitzt erst recht jeder normal begabte Schüler ein genügendes Maß geistiger Fähigkeiten für den mathematischen Unterricht. (...)

Unsere ganze gegenwärtige Kultur, soweit sie auf der geistigen Durchdringung und Dienstbarmachung der Natur beruht, findet ihre Grundlage in der Mathematik. (...) Trotzdem haben alle großen Mathematiker der Ansicht, die Anwendungen als Wertmesser für die Mathematik gelten zu lassen, heftig widersprochen.

[Es ist ein] unbegründetes Vorurteil (...), wenn man die Mathematik nur als Mittel zur Erzielung **logischen Denkens** hinstellt.

DAVID HILBERT: *Wissen und mathematisches Denken.* VORLESUNG 1922.

## IV.2 David Hilbert: *Wissen und mathematisches Denken.*



*Hilbert*

David Hilbert  
(1862-1942)

[D]ie Stärke der Mathematik als Bildungsmittel liegt (...) vorwiegend nach der ethischen Richtung, und zur freien, schöpferischen Verstandesbildung. (...) Nicht nur das sichere Bewußtsein, daß man durch Denken Wahrheiten finden könne, wird dadurch geweckt, sondern auch das Selbstvertrauen zum eigenen Verstand, die kritische Urteilskraft, welche den wahrhaft Gebildeten von dem im blossen Autoritätsglauben Befangenen unterscheidet.

HILBERT: WISSEN UND MATHEMATISCHES DENKEN (1922)

## IV.2 David Hilbert: *Wissen und mathematisches Denken.*



*Hilbert*

David Hilbert  
(1862-1942)

Die mathematischen Wahrheiten sind gerade dadurch ausgezeichnet, daß ihre Einsicht jedermann aufgezwungen werden kann. (...)

[D]ie Stärke der Mathematik als Bildungsmittel liegt (...) vorwiegend nach der ethischen Richtung, und zur freien, schöpferischen Verstandesbildung. (...) Nicht nur das sichere Bewußtsein, daß man durch Denken Wahrheiten finden könne, wird dadurch geweckt, sondern auch das Selbstvertrauen zum eigenen Verstand, die kritische Urteilskraft, welche den wahrhaft Gebildeten von dem im blossen Autoritätsglauben Befangenen unterscheidet.

HILBERT: WISSEN UND MATHEMATISCHES DENKEN (1922)

## V. Mathematik und Bildung – eine Art Resümee

- ① Mathematische Bildung illustriert den fundamentalen Unterschied von begründetem Wissen und zufälliger Meinung, sie schult damit die Widerständigkeit gegen unbegründete Vorurteile.
- ② Mathematische Bildung kann als Selbsterkundung des freien Geistes gestaltet werden, bei dem Freiheit und Selbstverpflichtung auf gemeinsame Regeln in Balance stehen.
- ③ Mathematische Bildung braucht Zeit, Muße und Geduld.
- ④ Mathematische Bildung kann und sollte auf einen ästhetischen Genuss – auf elementarer Ebene des Algorithmischen wie auf der Ebene kreativer Problemlösung – abzielen.

## V. Mathematik und Bildung – eine Art Resümee

**Selbstvertrauen auf die eigene Kraft, kritischer Blick, Energie in der Überwindung von Schwierigkeiten, die zunächst unübersteigbar scheinen, beharrlich auf das Ziel gerichteter Wille, sind ethische Kräfte und Qualitäten, die zu wecken es kein besseres Mittel gibt als die Beschäftigung mit Mathematik.**

HILBERT: WISSEN UND MATHEMATISCHES DENKEN (1922)