ZFB-Seminar: **p-adische Analysis** WS2019/20

Arthur Bartels / Markus Schmetkamp

1 Definition der p-adischen Zahlen

(Arthur Bartels, 15.10.2019)

Normierte Körper, nicht-archimedische Normen, Vervollständigungen, der Körper $\mathbb{Q}_p$.

Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ bilden bekanntermaßen einen Körper mit einer Norm $|\cdot|$. Der Prozess der Vervollständigung liefert den Körper der reellen Zahlen $\mathbb{R}$. Die rationalen Zahlen lassen sich aber auch mit einer anderen Norm ausstatten, der p-adischen Norm $|\cdot|_p$, wobei p eine Primzahl ist. Vervollständigen führt zum Körper $\mathbb{Q}_p$ der p-adischen Zahlen.

[Kat, §1.1–1.4]

2 Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}_p$

(Markus Schmetkamp, 22.10.2019)

p-adische Entwicklung, die ganzen Zahlen, Einheiten, Rechnen mit ganzen Zahlen

Analog zur Dezimaldarstellung von reellen Zahlen gibt es eine p-adische Darstellung p-adischer Zahlen. Wir können die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ als reelle Zahlen ohne Nachkommastellen auffassen. Es gibt aber auch p-adische ganze Zahlen (die p-adische Vervollständigung der gewöhnlichen ganzen Zahlen). Es stellt sich heraus, dass p-adische ganze Zahlen keine Nachkommastellen in ihrer p-adischen Darstellung haben. Im Vergleich zu den gewöhnlichen ganzen Zahlen ist das Rechnen mit p-adischen ganzen Zahlen etwas komplizierter, wenn auch nicht viel. Vor allem die Einheiten in $\mathbb{Z}_p$ sind wesentlich spannender als in $\mathbb{Z}$.

[Kat, §1.4–1.6]

3 Hensels Lemma

(Marius Lutzer, 29.10.2019)

Wurzeln in $\mathbb{Q}_p$, Nullstellen und Reduzibilität von Polynomen, Hensels Lemma, Ideale

Über den rellen Zahlen lassen sich manche ganzzahlige Gleichungen lösen, welche sich über $\mathbb{Q}$ nicht lösen lassen, z.B. ist $\sqrt{6}$ reell, aber nicht rational. Hensels Lemma gibt Aufschluss darüber, wann sich ganzzahlige Gleichungen über den p-adischen Zahlen lösen lassen. Zudem haben die p-adischen ganzen Zahlen positive Eigenschaften, welche die gewöhnlichen ganzen Zahlen nicht haben: $\mathbb{Z}_p$ ist ein sogenannter lokaler Ring.

[Kat, §1.7–1.8]

4 Der Satz von Ostrowski

(Gianna Frankholz, 05.11.2019)

Satz von Ostrowski, Produkt-Formel, Verschiedenheit der Vervollständigungen

Es stellt sich die Frage, ob neben $|\cdot|$ und $|\cdot|_p$ noch weitere Normen auf $\mathbb{Q}$ existieren und ob die Vervollständigungen $\mathbb{R}$ und $\mathbb{Q}_p$ tatsächlich verschiedene Objekte sind. Die Antwort ist: Alle nicht-trivialen Normen auf $\mathbb{Q}$ haben die Form $|\cdot|$ oder $|\cdot|_p$ und $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}_p$, $\mathbb{Q}_q$ sind verschiedene Körper für Primzahlen $p \neq q$.

[Kat, §1.9]

5 Topologische Eigenschaften. Cantor-Mengen I

(Annika Rosendahl, 12.11.2019)
Bälle, offene und abgeschlossene Mengen, Kompaktheit, Zusammenhang, Die Cantor-Menge

Die reellen Zahlen sind (topologisch) zusammenhängend. Das ist für uns sehr anschaulich. Bei den p-adischen Zahlen ist das Gegenteil der Fall: Sie sind (in einem gewissen Sinne) so unzusammenhängend wie es nur geht, man sagt, sie sind *total unzusammenhängend*. Auch sonst ist die Geometrie der p-adischen Zahlen sehr gewöhnungsbedürftig. So ist etwa jeder Punkt in einem Ball auch schon dessen Mittelpunkt...

[Kat, §2.1–2.2]

6 Euklidische Modelle für $\mathbb{Z}_p$. Cantor-Mengen II

(???, 19.11.2019)
$\mathbb{Z}_p$ ist eine Cantor-Menge, total unzusammenhängende Mengen im $\mathbb{R}^2$

Im letzten Vortrag wurde die Cantor-Menge definiert. Die Menge der p-adischen ganzen Zahlen ist homöomorph zur Cantor-Menge. Die Eigenschaften der Cantormenge zeigt, dass die Wahl der Primzahl p an dieser Stelle keine Rolle spielt. Es gibt zudem viele Möglichkeiten die p-adischen ganzen Zahlen, und damit die Cantormenge, zu visualisieren.

[Kat, §2.2–2.3]

7 Folgen und Reihen

(Markus Schmetkamp, 26.11.2019)
Folgen, Reihen, Konvergenz, Potenzreihen, Konvergenzradius

Viele Definitionen aus der Analysis lassen sich 1-zu-1 auf die p-adischen Zahlen übertragen: Folgen, Reihen, Konvergenz, Potenzreihen, etc. . Entsprechend erhält man ähnliche Resultate. Manche scheinen erschreckend einfach: z.B. ist eine Reihe $\sum_n a_n$ genau dann konvergent, wenn die zugrundeliegende Folge $(a_n)_n$ eine Nullfolge ist.

[Kat, §3.1–3.2]

8 Fortsetzbarkeit und bekannte Funktionen

(Emre Dönmez, 03.12.2019)
Fortsetzbarkeit von Potenzreihen, Logarithmus, Exponentialreihe

Die Potenzreihe der Logarithmusfunktion $\log(x+1)$ konvergiert im Intervall $(-1, 1)$. Wie wir wissen können wir diese Funktion fortsetzen, sodass sie sich auf alle positiven reellen Zahlen anwenden lässt. Der p-adische Fall unterscheidet sich hier vom reellen. Schon die Frage, was wir uns unter einer geeigneten Fortsetzung vorstellen, erweist sich als interessant.

[Kat, §3.3–3.5]

9 Stetige Funktionen

(???, 10.12.2019)

lokal-konstante und uniform stetige Funktionen, Satz von Baire

Wir haben ein gutes Gefühl für stetige Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Da die Topologie von $\mathbb{Q}_p$ und $\mathbb{Z}_p$ so verschieden ist von der der reellen Zahlen, verhalten sich stetige Funktionen ganz anders. Stetige Funktionen $f : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}_p$ lassen sich ganz gut untersuchen. Mithilfe des Satzes von Baire kann man die Existenz von kuriosen Abbildungen widerlegen, so gibt es z.B. keine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ welche an jeder rationalen Stelle stetig ist und an jeder irrationalen Stelle unstetig. Analoge Aussagen erhält man für die p-adischen Zahlen.

[Kat, §4.1–4.3]

Literatur

[Kat] **Svetlana Katok**, *p-adic Analysis Compard with Real.* AMS, Student Mathematical Library 37 (2007)

[Sch] **W. H. Schikhof**, *Ultrametric Calculus: An Introduction to p-Adic Analysis* `https://www.cambridge.org/core/books/ultrametric-calculus/FD8E1172062BF97D41430B559C895CCC`

[Neu] **J. Neukirch**, *Algebraische Zahlentheorie* `https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-540-37663-7`

[Rob] **Alain M. Robert**, *A Course in p-adic Analysis*

Die Bücher von Katok (Hauptquelle) und von Robert finden Sie im Semesterapparat. Die Bücher von Schikhof und Neukirch finden Sie unter den angegebenen Links. Damit Sie sich die Bücher ansehen können, müssen Sie sich im Uni-Netzwerk befinden.