# Elemente der Topologie

## Probeklausur

Wintersemester 17/18 — M. Joachim & R. Loose
**Name:** — 22.12.2017, 10-12 Uhr
**Übungsgruppe und Übungsleiter:**

---

*Bemerkung.* In den Aufgaben 1 und 2 erhalten Sie jeweils für 4 korrekte Antworten 4 Punkte, für 3 korrekte Antworten 2 Punkte, für 2 korrekte Antworten $\frac{1}{2}$ Punkt und für 1 korrekte Antwort $\frac{1}{4}$ Punkt.

**Aufgabe 1 (4 Punkte).** Seien $X$ und $Y$ topologische Räume, und sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? *Kreuzen Sie entsprechend an.*

| | | | |
|---|---|---|---|
| a) | $f$ ist genau dann stetig, wenn $f^{-1}(A)$ für alle abgeschlossenen Teilmengen $A \subset Y$ abgeschlossen ist. | ☐ wahr | ☐ falsch |
| b) | $f$ ist genau dann stetig, wenn $f^{-1}(\overset{\circ}{A}) = \overset{\circ}{(f^{-1}(A))}$ für alle Teilmengen $A \subset Y$ gilt. | ☐ wahr | ☐ falsch |
| c) | $f$ ist genau dann offen, wenn $f^{-1}(U)$ für alle offenen Teilmengen $U \subset Y$ offen ist. | ☐ wahr | ☐ falsch |
| d) | $f$ ist genau dann eine Einbettung, wenn $f$ offen, stetig und injektiv ist. | ☐ wahr | ☐ falsch |

**Aufgabe 2 (4 Punkte).** Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? *Kreuzen Sie entsprechend an.*

| | | | |
|---|---|---|---|
| a) | Seien $X, Y$ und $Z$ topologische Räume, und seien $f, f'\colon X \to Y$ und $g, g'\colon Y \to Z$ stetige Abbildungen. Sind sowohl $f$ und $f'$ als auch $g$ und $g'$ homotop, so sind auch $g \circ f$ und $g' \circ f'$ homotop. | ☐ wahr | ☐ falsch |
| b) | Die Abbildungen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto \exp(\pi t)$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto \sin(\pi t)$ sind nicht homotop. | ☐ wahr | ☐ falsch |
| c) | Seien $X$ und $Y$ topologische Räume, und seien $f, g, h\colon X \to Y$ stetige Abbildungen. Falls $f$ und $g$ homotop sind, so sind $f$ und $h$ genau dann isotop, wenn $g$ und $h$ isotop sind. | ☐ wahr | ☐ falsch |
| d) | Sind $A \subset X$ und $B \subset Y$ Teilräume topologischer Räume $X$ und $Y$, so ist die kanonische Abbildung $A \times B \to X \times Y$ eine Einbettung. | ☐ wahr | ☐ falsch |

**Aufgabe 3 (2+2 Punkte).**

a) Seien $X, Y$ und $Z$ topologische Räume. Seien $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to Z$ Abbildungen. *Zeigen Sie:* Falls $f$ ein Homöomorphismus ist, dann ist $g$ ein Homöomorphismus genau dann, wenn $g \circ f$ ein Homöomorphismus ist.

b) *Zeigen Sie:* Die Inklusion $i_U : U \to X$ eines Teilraums $U \subseteq X$ in einen topologischen Raum $X$ ist genau dann eine offene Abbildung, wenn $U$ offen in $X$ ist.

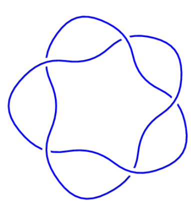
**Aufgabe 4 (2+4 Punkte).** Sei $X$ ein topologischer Raum und $R \subseteq X \times X$ eine Äquivalenzrelation auf $X$. Betrachten Sie die Menge der Äquivalenzklassen $X/R$ zusammen mit der Quotiententopologie und der Projektionsabbildung $\pi\colon X \to X/R, x \mapsto [x]$, die einem Punkt $x \in X$ seine zugehörige Äquivalenzklasse $[x] \in X/R$ zuordnet.

a) *Zeigen Sie, dass $\pi$ stetig ist.*

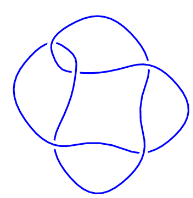
b) Sei $Y$ ein topologischer Raum und $f\colon X \to Y$ eine Abbildung die durch $X/R$ via $\overline{f}\colon X/R \to Y$ faktorisiert, das heißt, es gilt $f = \overline{f} \circ \pi$. *Zeigen Sie, dass $f$ genau dann stetig ist, wenn $\overline{f}$ stetig ist.*

**Aufgabe 5 (2+2+2 Punkte).** Welchen Wert haben die folgenden Invarianten für die beiden nachfolgenden *Knotendiagramme* 1a und 1b? *Tragen Sie den entsprechenden Wert in den zugehörigen Kasten ein.*

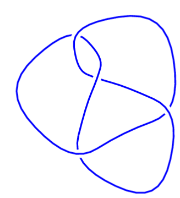
| | Knotendiagramm 1a | Knotendiagramm 1b |
|---|---|---|
| a) Entwirrungszahl | | |
| b) Brückenzahl | | |
| c) Färbungszahl | | |



(a) Knotendiagramm 1;



(b) Knotendiagramm 2;



(c) Verschlingung $V$ zu Aufg. 6;

**Aufgabe 6 (4+2+2 Punkte).**

a) *Berechnen Sie das Bracket-Polynom $\langle V \rangle$ für die unten angegebene Verschlingung aus Abbildung 1c.*

b) *Bestimmen Sie das Jones-Polynom $J_V(A)$ für die unten angegebene Verschlingung aus Abbildung 1c.*

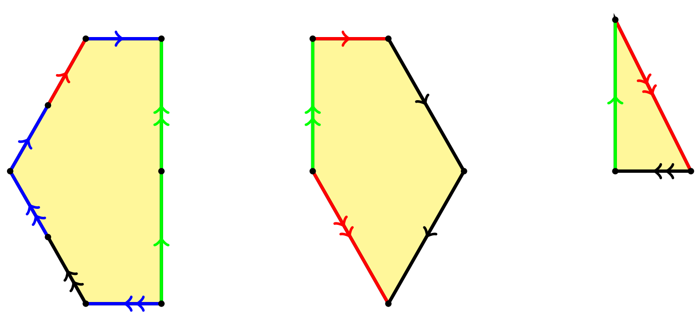
*Bemerkung.* In der Vorlesung und in den Übungen wurde gezeigt, dass das Jones-Polynom eines Knotens unabhängig von der Orientierung des Knotens ist. Das heißt, ist $V'$ ein Knoten und $\overline{V'}$ der Knoten, der aus $V'$ hervorgeht, indem man die Orientierung in $V'$ umkehrt, so gilt für das Jones-Polynom $J_V(A) = J_{\overline{V}}(A)$. Um das Jones-Polynom $J_V(A)$ zu bestimmen, dürfen Sie also eine Orientierung von $V$ wählen und das Jones-Polynom entsprechend dieser Orientierung berechnen.

c) *Zeigen oder widerlegen Sie:* Die Verdrillungszahl eines orientierten Verschlingungsdiagrammes hängt nur von der durch das Verschlingungsdiagramm bestimmten Äquivalenzklasse ab.

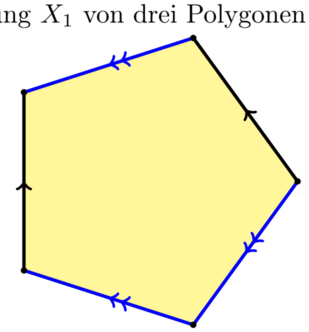
**Aufgabe 7 (4+4 Punkte).**

a) Betrachten Sie die disjunkte Vereinigung $X_1$ der Polygone aus Abbildung 2a und die Äquivalenzrelation $R_1$, die durch die Markierung der Kanten definiert wird. *Zeigen oder widerlegen Sie anschaulich:* Der Quotientenraum $X_1/R_1$ ist eine geschlossene Fläche. *Falls Sie zu dem Entschluss kommen, dass $X_1/R_1$ eine geschlossene Fläche ist, so geben Sie an zu welcher geschlossenen Fläche $F_g$ beziehungsweise $F'_g$ aus der Vorlesung $X_1/R_1$ homöomorph ist.*

b) Betrachten Sie das Polygon $X_2$ aus Abbildung 2b und die Äquivalenzrelation $R_2$, die durch die Markierung der Kanten definiert wird. *Zeigen oder widerlegen Sie anschaulich:* Der Quotientenraum $X_2/R_2$ ist eine geschlossene Fläche.



(a) Disjunkte Vereinigung $X_1$ von drei Polygonen mit markierten Kanten;



(b) Polygon $X_2$ mit Markierung von Kanten;

*Viel Erfolg!*