Lösungsskizzen zu den Übungsaufgaben

# Elemente der Topologie

**Blatt 2** M. Joachim & R. Loose

Wintersemester 2017/2018 Abgabe: Freitag, den 27.10.2017, 10:00 Uhr

---

**Aufgabe 4.** Sei $X$ die Menge der Farben eines Skatspiel, d.h., $X = \{\diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit, \clubsuit\}$. *Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen.*

i) $\mathcal{M} = \{\{\diamondsuit\}, \{\diamondsuit, \spadesuit, \clubsuit\}, \emptyset, \{\spadesuit, \clubsuit\}, \{\diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit, \clubsuit\}\}$ ist eine Topologie auf $X$.

*Behauptung.* $\mathcal{M}$ ist eine Topologie auf $X$.

*Beweis.* Die Aufgabe kann man durch bloßes Hinschauen lösen. Eine andere Möglichkeit ist eine kleine Zeichnung anzufertigen, in der man die 4 Elemente $\diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit, \clubsuit$ aus $X$ als Ecken eines Quadrates anordnet und Elemente $a_i \in X, i \in I$ für eine Indexmenge $I$ genau dann umkreist, wenn $\{a_i | i \in I\} \in \mathcal{M}$, siehe Abbildung 1. So kann

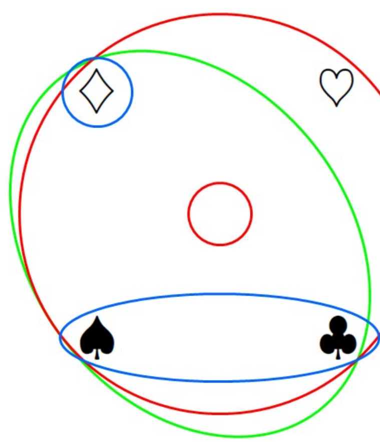


Abbildung 1: Visuelle Darstellung der Topologie $\mathcal{M}$ auf der Menge $X$.

man leicht einsehen, dass $\mathcal{M}$ die Axiome einer Topologie erfüllt. □

ii) $\mathcal{N} = \{\{\spadesuit\}, \{\spadesuit, \clubsuit\}, \{\heartsuit, \spadesuit\}, \emptyset, \{\diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit, \clubsuit\}, \{\heartsuit, \spadesuit, \clubsuit\}, \{\heartsuit\}, \{\heartsuit, \clubsuit\}\}$ ist eine Topologie auf $X$.

*Behauptung.* $\mathcal{N}$ ist keine Topologie auf $X$.

*Beweis.* Es gilt $\{\heartsuit, \clubsuit\}, \{\spadesuit, \clubsuit\} \in \mathcal{N}$, aber

$$\{\heartsuit, \clubsuit\} \cap \{\spadesuit, \clubsuit\} = \{\clubsuit\} \notin \mathcal{N}.$$

Dies widerspricht Axiom ii), nach welchem endliche Durchschnitte von Mengen aus $\mathcal{N}$ in $\mathcal{N}$ sein müssen. □

**Aufgabe 5.** Sei $X = \{\diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit, \clubsuit\}$ wie in Augabe 4.

i) Sei $\mathcal{S} = \{\{\diamondsuit, \heartsuit\}, \{\heartsuit, \spadesuit\}\}$. *Bestimmen Sie die Topologie $\mathcal{O}$ auf $X$, die von $\mathcal{S}$ als Subbasis erzeugt wird.* Gehen Sie dazu so vor wie in der Vorlesung beschrieben. (Vergleiche Vorlesungsnotizen Kapitel 2, Bemerkung auf Seite 9.)

   *Antwort.* Eine Basis $\mathcal{B} = \{\{\heartsuit\}, \{\diamondsuit, \heartsuit\}, \{\heartsuit, \spadesuit\}, \{\diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit, \clubsuit\}\}$ für $\mathcal{O}$ erhalten wir durch Hinzunahme aller endlichen Durchschnitte.

$$\mathcal{O} = \{\emptyset, \{\heartsuit\}, \{\diamondsuit, \heartsuit\}, \{\heartsuit, \spadesuit\}, \{\diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit\}, \{\diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit, \clubsuit\}\}$$

   erhalten wir dann durch Hinzunahme beliebiger Vereinigungen aus $\mathcal{B}$.

ii) Sei $\mathcal{O}$ die Topologie auf $X$ aus Augabenteil a). *Bestimmen Sie die Menge der Umgebungen $\mathcal{V}(\diamondsuit)$ von $\diamondsuit$.*

   *Antwort.* Es gilt $\mathcal{V}(\diamondsuit) = \{\{\diamondsuit, \heartsuit\}, \{\diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit\}, \{\diamondsuit, \heartsuit, \clubsuit\}, \{\diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit, \clubsuit\}\}$.

**Aufgabe 6.** Seien $(X, d), (X', d')$ metrische Räume, $\mathcal{O}$ die zugrundeliegende Topologie von $(X, d)$, d.h., $\mathcal{O} = \{U \subseteq X | U \text{ ist offen im metrischen Sinne}\}$ und $\mathcal{O}'$ die zugrundeliegende Topologie von $(X', d')$. (Vergleiche Vorlesungsnotizen Kapitel 1, Seite 3.) Außerdem sei $f : X \longrightarrow X'$ eine Abbildung. *Beweisen Sie die Äquivalenz der beiden folgenden Aussagen.*

i) $f$ ist stetig im metrischen Sinne. (Vergleiche Kapitel 1 der Vorlesung.)

ii) $f$ ist stetig im topologischen Sinne. (Vergleiche Kapitel 2 der Vorlesung.)

*Beweis.* Sei $f$ stetig im metrischen Sinne, das heißt $f$ ist stetig in $x$ für alle $x \in X$, das heißt für jedes $x \in X$ und jedes $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ gibt es ein $\delta > 0$, sodass $f(B_\delta(x)) \subseteq B_\epsilon(f(x))$ gilt. Sei jetzt $U \subseteq X'$ offen. Wir müssen zeigen, dass $f^{-1}(U) \subseteq X$ offen ist. Sei dazu $x \in f^{-1}(U)$, d.h., $f(x) \in U$. Da $U \subseteq X'$ offen ist, gibt es ein $\epsilon > 0$ mit $B_\epsilon(f(x)) \subseteq U$. Da $f$ stetig in $x$ im metrischen Sinne ist, gibt es ein $\delta > 0$ mit $f(B_\delta(x)) \subseteq B_\epsilon(f(x)) \subseteq U$. Damit gilt $B_\delta(x) \subseteq f^{-1}(U)$. Also gibt es für jedes $x \in f^{-1}(U)$ ein $\delta > 0$, sodass $B_\delta(x) \subseteq f^{-1}(U)$

gilt. Damit ist $f^{-1}(U) \subseteq X$ offen und $f$ stetig im topologischen Sinne.
Sei $f$ stetig im topologischen Sinne, das heißt für alle $U \subseteq X'$ offen ist $f^{-1}(U) \subseteq X$ offen. Insbesondere ist für jedes $x \in X$ und jedes $\epsilon > 0$ der Ball $B_\epsilon(f(x))$ offen und nach Voraussetzung $f^{-1}(B_\epsilon(f(x))) \subseteq X$ offen. Da $f^{-1}(B_\epsilon(f(x)))$ offen ist und $x \in f^{-1}(B_\epsilon(f(x)))$, gibt es $\tilde{\delta} \in \mathbb{R}^+$, sodass $B_{\tilde{\delta}}(x) \subseteq f^{-1}(B_\epsilon(f(x)))$. Damit gilt dann $f(B_{\tilde{\delta}}(x)) \subseteq B_\epsilon(f(x))$. (Setze $\delta := \tilde{\delta}$.) Damit ist $f$ stetig im metrischen Sinne. □

**Bonusaufgabe.**

i) Seien $X$ eine Menge und $\mathcal{A}$ eine Menge von Teilmengen von $X$ mit den folgenden Eigenschaften:

   i) für eine Familie $\{A_i\}_{i \in I}$, mit $A_i \in \mathcal{A}$ für alle $i \in I$, ist $\bigcap_{i \in I} A_i \in \mathcal{A}$;
   ii) für $n \in \mathbb{N}$ und $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ ist $\bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}$;
   iii) $X, \emptyset \in \mathcal{A}$.

   Wir definieren $\mathcal{O} := \{U \subseteq X | U = X \setminus A \text{ für ein } A \in \mathcal{A}\}$. *Zeigen Sie, dass $\mathcal{O}$ eine Topologie auf $X$ ist.*

   *Beweis.* Wir müssen die Axiome für eine Topologie nachprüfen.

   i) Sei $\{U_i\}_{i \in I}$ eine Familie von Menge aus $\mathcal{O}$, das heißt, es gilt $U_i = X \setminus A_i$ für ein $A_i \in \mathcal{A}$ für alle $i \in I$. Dann gilt

   $$\bigcup_{i \in I} U_i = \bigcup_{i \in I} (X \setminus A_i) = X \setminus (\bigcap_{i \in I} A_i).$$

   Da $\bigcap_{i \in I} A_i$ nach Eigenschaft i) von $\mathcal{A}$ in $\mathcal{A}$ liegt, ist $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{O}$.

   ii) Seien $n \in \mathbb{N}, U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{O}$, d.h., es gibt $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ mit $U_i = X \setminus A_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Dann gilt

   $$\bigcap_{i=1}^{n} U_i = \bigcap_{i=1}^{n} (X \setminus A_i) = X \setminus (\bigcup_{i=1}^{n} A_i).$$

   Da $\bigcup_{i=1}^n A_i$ nach Eigenschaft ii) von $\mathcal{A}$ in $\mathcal{A}$ liegt, ist $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{O}$.

   iii) Wir schreiben $\emptyset = X \setminus X, X = X \setminus \emptyset$ und da $X, \emptyset$ nach Eigenschaft iii) von $\mathcal{A}$ in $\mathcal{A}$ liegen, gilt $\emptyset, X \in \mathcal{O}$.

□

ii) Für $X = \mathbb{C}$ definieren wir $\mathcal{A}_Z := \{A \subseteq \mathbb{C} | A = p^{-1}(0)$ für ein $p \in \mathbb{C}[T]\}$. *Weisen Sie Eigenschaften i),ii),iii) aus Aufgabenteil a) für* $\mathcal{A}_Z$ *nach. Folgern Sie, dass* $\mathcal{O}_Z = \{U \subseteq X | U = X \setminus A$ *für ein* $A \in \mathcal{A}_Z\}$ *eine Topologie auf* $\mathbb{C}$ *ist.* $\mathcal{O}_Z$ ist die sogenannte *Zariski-Topologie.*

*Beweis.* Zuerst sollte man Eigenschaft iii) nachweisen, da diese benötigt wird, um Eigenschaft i) zu zeigen. Außerdem benutzen wir, dass jedes Polynom $p \in \mathbb{C}[T]$ in Linearfaktoren zerfällt. Das heißt, für jedes $A \in \mathcal{A}_Z$ mit $A = p^{-1}(0)$ für $0 \neq p = c(T - z_1) \cdot \ldots \cdot (T - z_k) \in \mathbb{C}[T], c \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{N}$ gilt $A = \{z_1, \ldots, z_k\}$. Insbesondere ist $A$ endlich.

i) Sei $\{A_i\}_{i \in I}$ eine Familie, mit $A_i \in \mathcal{A}_Z$ für alle $i \in I$. Dann ist $\bigcap_{i \in I} A_i$ endlich, da Durchschnitte von endlichen Mengen endlich sind. Ist $\bigcap_{i \in I} A_i = \emptyset$, dann ist $\bigcap_{i \in I} A_i \in \mathcal{A}$ nach Eigenschaft iii). Sei $\bigcap_{i \in I} A_i = \{z_1, \ldots, z_m\}$ für $z_1, \ldots, z_m \in \mathbb{C}$. Dann gilt $\bigcap_{i \in I} A_i = q^{-1}(0)$ für $q = (T - z_1) \cdot \ldots \cdot (T - z_m)$. Damit ist $\bigcap_{i \in I} A_i \in \mathcal{A}_Z$.

ii) Seien $n \in \mathbb{N}, A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}_Z$. Dann gibt es $p_i \in \mathbb{C}[T]$ mit $p_i^{-1}(0) = A_i$ für alle $i = 1, \ldots, m$. Dann gilt $\bigcup_{i=1}^n A_i = (\prod_{i=1}^n p_i)^{-1}(0)$. Damit ist $\bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}_Z$.

iii) Für das Nullpolynom $p = 0$ ist $\mathbb{C} = p^{-1}(0)$. Also ist $\mathbb{C} \in \mathcal{A}_Z$. Für ein konstantes Polynom $q = c$ für ein $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist $q^{-1}(0) = \emptyset$. Also ist $\emptyset \in \mathcal{A}_Z$.

Mit dem ersten Aufgabenteil folgt dann, dass $\mathcal{O}_Z$ eine Topologie auf $\mathbb{C}$ ist. $\square$