

Lösungsskizze zur Probeklausur Elemente der Topologie

Wintersemester 17/18
22.12.2017, 10-12 Uhr

M. Joachim & R. Loose

Bemerkung. In den Aufgaben 1 und 2 erhalten Sie jeweils für 4 korrekte Antworten 4 Punkte, für 3 korrekte Antworten 2 Punkte, für 2 korrekte Antworten $\frac{1}{2}$ Punkt und für 1 korrekte Antwort $\frac{1}{4}$ Punkt.

Aufgabe 1 (4 Punkte). Seien X und Y topologische Räume, und sei $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? *Kreuzen Sie entsprechend an.*

- | | |
|---|--|
| a) f ist genau dann stetig, wenn $f^{-1}(A)$ für alle abgeschlossenen Teilmengen $A \subset Y$ abgeschlossen ist. | <input checked="" type="checkbox"/> wahr <input type="checkbox"/> falsch |
| b) f ist genau dann stetig, wenn $f^{-1}(\overset{\circ}{A}) = (f^{-1}(A))^\circ$ für alle Teilmengen $A \subset Y$ gilt. | <input type="checkbox"/> wahr <input checked="" type="checkbox"/> falsch |
| c) f ist genau dann offen, wenn $f^{-1}(U)$ für alle offenen Teilmengen $U \subset Y$ offen ist. | <input type="checkbox"/> wahr <input checked="" type="checkbox"/> falsch |
| d) f ist genau dann eine Einbettung, wenn f offen, stetig und injektiv ist. | <input type="checkbox"/> wahr <input checked="" type="checkbox"/> falsch |

Antwort. a) Die Aussage gilt nach Vorlesung, vergleiche Skript Seite 12.

b) Die Aussage ist falsch. Dies kann durch das (stetige) Gegenbeispiel $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 0$ eingesehen werden, indem man $A = \{0\}$ wählt. Dann erhält man $\overset{\circ}{A} = \emptyset$ und entsprechend $f^{-1}(\overset{\circ}{A}) = \emptyset$. Da $f^{-1}(\{0\}) = \mathbb{R}$ und $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}$ offen ist gilt $(f^{-1}(A))^\circ = \mathbb{R}$ und damit $f^{-1}(\overset{\circ}{A}) \neq (f^{-1}(A))^\circ$.

c) Die Aussage ist falsch. Dies kann durch das Gegenbeispiel der stetigen, aber nicht offenen Abbildung $f: \{*\} \rightarrow \mathbb{R}, * \mapsto 0$ eingesehen werden, wobei $\{*\}$ der Einpunktraum ist.

$$f^{-1}(U) = \begin{cases} \{*\}, & 0 \in U; \\ \emptyset, & 0 \notin U; \end{cases}$$

für alle $U \subseteq \mathbb{R}$, das heißt insbesondere für alle $U \subseteq \mathbb{R}$ offen. Allerdings ist $\{*\} \subseteq \{*\}$ offen, aber $f(\{*\}) = \{0\} \subseteq \mathbb{R}$ selbstverständlich nicht.

d) Die Aussage ist falsch. Dies kann durch die Einbettung $f: \{*\} \rightarrow \mathbb{R}, * \mapsto 0$ eingesehen werden. f ist nicht offen, jedoch eine Einbettung, denn $f(\{*\}) = \{0\} \subseteq \mathbb{R}$ ist nicht offen.

Aufgabe 2 (4 Punkte). Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? *Kreuzen Sie entsprechend an.*

- | | | |
|----|---|-------------------|
| a) | Seien X, Y und Z topologische Räume, und seien $f, f' : X \rightarrow Y$ und $g, g' : Y \rightarrow Z$ stetige Abbildungen. Sind sowohl f und f' als auch g und g' homotop, so sind auch $g \circ f$ und $g' \circ f'$ homotop. | ☒ wahr □ falsch |
| b) | Die Abbildungen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \exp(\pi t)$ und $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \sin(\pi t)$ sind nicht homotop. | □ wahr ☒ falsch |
| c) | Seien X und Y topologische Räume, und seien $f, g, h : X \rightarrow Y$ stetige Abbildungen. Falls f und g homotop sind, so sind f und h genau dann isotop, wenn g und h isotop sind. | □ wahr ☒ falsch |
| d) | Sind $A \subset X$ und $B \subset Y$ Teilräume topologischer Räume X und Y , so ist die kanonische Abbildung $A \times B \rightarrow X \times Y$ eine Einbettung. | ☒ wahr □ falsch |

Antwort. a) Sei $H : X \times I \rightarrow Y$ eine Homotopie mit $H_0 = f, H_1 = f'$, außerdem $G : Y \times I \rightarrow Z$ eine Homotopie mit $G_0 = g, G_1 = g'$. Dann ist $F : X \times I \rightarrow Z$ mit

$$X \times I \xrightarrow{H \times id_I} Y \times I \xrightarrow{G} Z, \quad (x, t) \mapsto (H(x, t), t) \mapsto G((H(x, t), t))$$

eine Homotopie mit $F_0 = g \circ f, F_1 = g' \circ f'$.

- b) Die Aussage ist falsch. Da \mathbb{R} kontraktibel ist, sind alle Abbildungen $\tilde{f}, f' : X \rightarrow \mathbb{R}$ homotop zueinander für einen beliebigen Raum X und stetige Abbildungen \tilde{f}, f' .
- c) Die Aussage ist falsch. Zum Beispiel sind für $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f = 0, g = h = id_{\mathbb{R}}$ die Abbildungen f und g homotop, f und h aber nicht isotop zueinander, obwohl g und h isotop zueinander sind.
- d) Die kanonische Abbildung $\iota : A \times B \rightarrow X \times Y, (a, b) \mapsto (a, b)$ ist injektiv und damit bijektiv auf ihr Bild. Um zu zeigen, dass ι eine Einbettung ist, bleibt zu zeigen, dass $\iota : A \times B \rightarrow \iota(A \times B) \subseteq X \times Y$ ein Homöomorphismus ist, wobei $A \times B$ die Produkttopologie \mathcal{O}_{prod} trägt und $\iota(A \times B) \subseteq X \times Y$ die Teilraumtopologie \mathcal{O}_{teil} . Anders gesagt müssen wir zeigen, dass $\mathcal{O}_{prod} = \mathcal{O}_{teil}$ gilt.

(a) Wir erinnern uns, dass

$$\mathcal{B}_{prod} = \{U \times V \mid U \subseteq A, V \subseteq B \text{ offen}\}$$

eine Basis für \mathcal{O}_{prod} ist. Da $U \subseteq A$ offen ist, gibt es $\tilde{U} \subseteq X$ offen und $\tilde{V} \subseteq Y$ offen mit $U = A \cap \tilde{U}, V = B \cap \tilde{V}$. Es gilt dann $U \times V = (A \times B) \cap (\tilde{U} \times \tilde{V})$ und somit ist $U \times V \in \mathcal{O}_{teil}$. Da \mathcal{B}_{prod} eine Basis für \mathcal{O}_{prod} ist und \mathcal{O}_{teil} eine Topologie, folgt $\mathcal{O}_{prod} \subseteq \mathcal{O}_{teil}$.

- (b) Sei jetzt $W \in \mathcal{O}_{teil}$, das heißt es gibt $\tilde{W} \subseteq X \times Y$ offen mit $W = (A \times B) \cap \tilde{W}$. Für die Topologie auf $X \times Y$ ist

$$\tilde{\mathcal{B}} = \{\tilde{W} \subseteq X \times Y \mid \tilde{W} = \tilde{U} \times \tilde{V}, \tilde{U} \subseteq X, \tilde{V} \subseteq Y \text{ offen}\}$$

eine Basis. Damit ist

$$\mathcal{B}_{teil} = \{(A \times B) \cap (\tilde{U} \times \tilde{V}) \mid \tilde{U} \subseteq X, \tilde{V} \subseteq Y \text{ offen}\}$$

eine Basis von \mathcal{O}_{teil} . Sei jetzt $W \in \mathcal{B}_{teil}$ mit $W = (A \times B) \cap (\tilde{U} \times \tilde{V})$ und $\tilde{U} \subseteq X, \tilde{V} \subseteq Y$ offen. Dann ist $W = (A \times B) \cap (\tilde{U} \times \tilde{V}) = (A \cap \tilde{U}) \times (B \cap \tilde{V}) = U \times V$ mit $U = A \cap \tilde{U}, V = B \cap \tilde{V}$ und damit gilt $W \in \mathcal{O}_{prod}$. Da \mathcal{B}_{teil} eine Basis für \mathcal{O}_{teil} und \mathcal{O}_{prod} eine Topologie ist, gilt $\mathcal{O}_{teil} \subseteq \mathcal{O}_{prod}$.

Bemerkung. Man sieht oben sofort, dass $\mathcal{B}_{prod} = \mathcal{B}_{teil}$ gilt und damit die Standardbasen für die beiden Topologien sogar übereinstimmen.

Aufgabe 3 (2+2 Punkte).

- a) Seien X, Y und Z topologische Räume. Seien $f: X \rightarrow Y$ und $g: Y \rightarrow Z$ Abbildungen. Zeigen Sie: Falls f ein Homöomorphismus ist, dann ist g ein Homöomorphismus genau dann, wenn $g \circ f$ ein Homöomorphismus ist.

Beweis.

Bemerkung. Nach Vorlesung ist die Verknüpfung von zwei Homöomorphismen wieder ein Homöomorphismus.

Sei also g ein Homöomorphismus. Da f nach Voraussetzung ein Homöomorphismus ist, so ist $g \circ f$ nach obiger Bemerkung ein Homöomorphismus.

Sei jetzt $g \circ f$ ein Homöomorphismus. Da f ein Homöomorphismus ist, ist f^{-1} ebenfalls ein Homöomorphismus und nach obiger Bemerkung auch $g \circ f \circ f^{-1} = g$. \square

- b) Zeigen Sie: Die Inklusion $i_U: U \rightarrow X$ eines Teilraums $U \subseteq X$ in einen topologischen Raum X ist genau dann eine offene Abbildung, wenn U offen in X ist.

Beweis. Sei $i_U: U \rightarrow X$ eine offene Abbildung. Da $U \subseteq U$ offen ist, ist $i_U(U) = U \subseteq X$ offen.

Sei $U \subseteq X$ offen und $V \subseteq U$ offen, wobei U die Teilraumtopologie von X trägt. Nach Definition gibt es dann $W \subseteq X$ offen mit $W \cap U = V$. Es gilt dann $i_U(V) = V = W \cap U$ und $W \cap U \subseteq X$ ist als Durchschnitt von zwei offenen Mengen in X offen in X . \square

Aufgabe 4 (2+4 Punkte). Sei X ein topologischer Raum und $R \subseteq X \times X$ eine Äquivalenzrelation auf X . Betrachten Sie die Menge der Äquivalenzklassen X/R zusammen mit der Quotiententopologie und der Projektionsabbildung $\pi: X \rightarrow X/R, x \mapsto [x]$, die einem Punkt $x \in X$ seine zugehörige Äquivalenzklasse $[x] \in X/R$ zuordnet.

- a) Zeigen Sie, dass π stetig ist.

Beweis. Wir zeigen, dass Urbilder offener Mengen offen sind. Sei $U \subseteq X/R$ offen. Nach Definition ist $\pi^{-1}(U) \subseteq X$ offen. Damit ist π stetig. \square

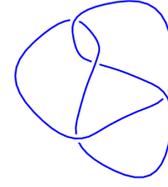
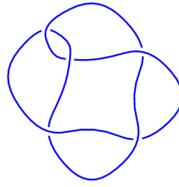
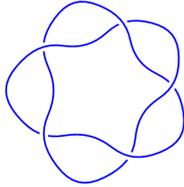
- b) Sei Y ein topologischer Raum und $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung die durch X/R via $\bar{f}: X/R \rightarrow Y$ faktorisiert, das heißt, es gilt $f = \bar{f} \circ \pi$. Zeigen Sie, dass f genau dann stetig ist, wenn \bar{f} stetig ist.

Beweis. Sei f stetig und $U \subseteq Y$ eine offene Menge. Wir müssen zeigen, dass $\bar{f}^{-1}(U) \subseteq X/R$ offen ist. Nach Definition ist $\bar{f}^{-1}(U) \subseteq X/R$ offen, wenn $\pi^{-1}(\bar{f}^{-1}(U)) \subseteq X$ offen ist. Es gilt aber $\pi^{-1}(\bar{f}^{-1}(U)) = (\bar{f} \circ \pi)^{-1}(U) = f^{-1}(U)$ und da f stetig ist, ist $f^{-1}(U) \subseteq X$ offen und damit ebenfalls $\bar{f}^{-1}(U) \subseteq X/R$.

Sei \bar{f} stetig. Da π stetig ist und die Komposition von stetigen Abbildungen stetig ist, ist $f = \bar{f} \circ \pi$ stetig. \square

Aufgabe 5 (2+2+2 Punkte). Welchen Wert haben die folgenden Invarianten für die beiden nachfolgenden *Knotendiagramme* 1a und 1b? *Tragen Sie den entsprechenden Wert in den zugehörigen Kasten ein.*

	Knotendiagramm 1a	Knotendiagramm 1b
a) Entwirrungszahl	2	1
b) Brückenzahl	5	5
c) Färbungszahl	0	0



(a) Knotendiagramm V_1 ; (b) Knotendiagramm V_2 ; (c) Verschlingung V zu Aufg. 6;

Antwort. a) Wir zeigen hier nur, dass die Entwirrungszahl von Knotendiagramm 1a ≤ 2 ist und von Knotendiagramm 1b ≤ 1 ist. Um zu zeigen, dass die Knotendiagramme 1a und 1b nicht trivial sind und damit die Entwirrungszahlen 2 beziehungsweise 1 zu erhalten, sollte man eigentlich eine nicht verschwindende Knoteninvariante finden. Da beide jedoch nicht färbbar sind, wie wir unten sehen, ist diese Invariante nicht ohne Weiteres zu finden. Die Invariante kann zum Beispiel das Jonespolynom sein, wobei die Jonespolynome J_1 für Knotendiagramm 1a und J_2 für Knotendiagramm 1b über das Bracket-Polynom sehr aufwendig zu berechnen sind, da es jeweils 32 Zustände gibt. Anstatt dessen wählen wir den Weg über die universelle Entwirrungsinvariante Γ und setzen dann $a_+ = A^4, a_- = -A^{-4}, a_0 = A^2 - A^{-2}$. Mit der Rechnung aus dem Appendix, siehe A, ergibt sich dann mit (1) und (2)

$$J_1 = A^{-8} + A^{-16} - A^{-20} + A^{-24} - A^{-28};$$

$$J_2 = A^{-4} - A^{-8} + 2A^{-12} - A^{-16} + A^{-20} - A^{-24};$$

lauten.

- Aufgrund der Symmetrie von Knotendiagramm 1a ist es egal, welche Kreuzung wir zuerst ändern. Ändert man eine Überkreuzung, zum Beispiel wie in Abbildung 2a markiert, so erhält man den folgenden Knoten, siehe Abbildung 2b. Dies ist nach einer Reidemeisterbewegung von Typ 2 der linksdrehende Kleeblattknoten, siehe Abbildung 2c, sprich nicht trivial. Ändert man eine weitere Überkreuzung entsprechend 2d, erhält man nach Reidemeisterbewegungen, zum Beispiel von Typ 2 und 1 den trivialen Knoten, siehe Abbildungen 2e und 2f.
 - Ändert man die Kreuzung in Knotendiagramm 1b entsprechend Abbildung 2g, so erhalten wir Knotendiagramm 2h. Man sieht leicht, dass nach einer Reidemeisterbewegung von Typ 2, siehe Abbildung 2i, und drei Reidemeisterbewegungen von Typ 1 der triviale Knoten entsteht.
- b) Die Antworten sind offensichtlich, wenn man die Definition der Brückzahl kennt, siehe Seite 46 im Vorlesungsskript.
- c) • Knotendiagramm 1a ist nicht färbbar. Dies kann man zum Beispiel sehen, indem man anfängt einen Bogen wie in Abbildung 2j zu färben. Entscheidet man sich an der markierten Kreuzung, siehe Abbildung 2k, die Farbe nicht zu wechseln, sieht man sehr schnell, dass man zwangsweise beim trivial gefärbten Knoten endet. Wechselt man die Farbe, so endet man zum Beispiel beim folgenden Knoten wie in Abbildung 2l, wobei es keine passende Farbe für den letzten Bogen gibt.
- Knotendiagramm 1b ist nicht färbbar. Wieder fangen wir an einen Bogen wie in Abbildung 2m zu färben. An der markierten Stelle, siehe Abbildung 2n, sieht man, dass wenn wir die Farbe nicht ändern, beim trivial gefärbten Knoten enden. Ändert man die Farbe, so enden wir zum Beispiel bei Abbildung 2o, wobei der letzte fehlende Bogen keine passende Farbe erhalten kann.

Aufgabe 6 (4+2+2 Punkte).

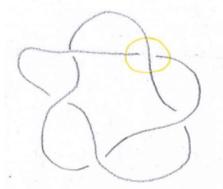
- a) Berechnen Sie das Bracket-Polynom $\langle V \rangle$ für die oben angegebene Verschlingung V aus Abbildung 1c.

Antwort. Die 16 verschiedenen Zustände von V sind der Tabelle in Abbildung 3 zu entnehmen. Für das Bracket-Polynom $\langle V \rangle$ ergibt sich somit

$$\langle V \rangle = \sum_{i=1}^{16} A^{a(Z_i)} B^{b(Z_i)} d^{|Z_i|-1} = (A^4 + A^2 B^2 + B^4) d^2 + (4A^3 B + 4AB^3) d + 5A^2 B^2.$$

- b) Bestimmen Sie das Jones-Polynom $J_V(A)$ für die oben angegebene Verschlingung V aus Abbildung 1c.

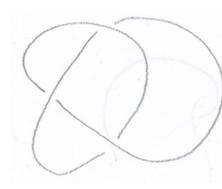
Bemerkung. In der Vorlesung und in den Übungen wurde gezeigt, dass das Jones-Polynom eines Knotens unabhängig von der Orientierung des Knotens ist. Das heißt, ist V' ein Knoten und $\overline{V'}$ der Knoten, der aus V' hervorgeht, indem man die Orientierung in V' umkehrt, so gilt für das Jones-Polynom $J_V(A) = J_{\overline{V'}}(A)$. Um das Jones-Polynom $J_V(A)$ zu bestimmen, dürfen Sie also eine Orientierung von V wählen und das Jones-Polynom entsprechend dieser Orientierung berechnen.



(a) Knotendiagramm V_1 mit markierter Kreuzung;



(b) Knotendiagramm V_1 mit erster geänderter Kreuzung;



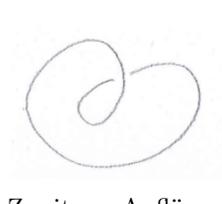
(c) Links drehender Kleeblattknoten;



(d) Kleeblattknoten mit markierter Kreuzung;



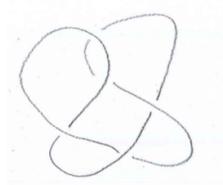
(e) Erste Auflösungsstufe Kleeblattknoten;



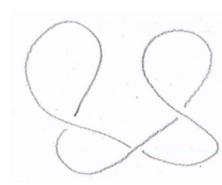
(f) Zweite Auflösungsstufe Kleeblattknoten;



(g) Knotendiagramm V_2 mit markierter Kreuzung;



(h) Knotendiagramm V_2 mit erster geänderter Kreuzung;



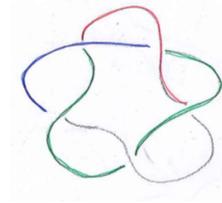
(i) Auflösung von Knotendiagramm V_2 ;



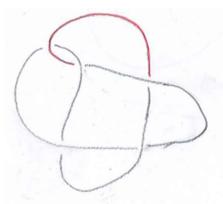
(j) Knotendiagramm V_1 mit gefärbtem ersten Bogen;



(k) Knotendiagramm V_1 mit markierter Kreuzung;



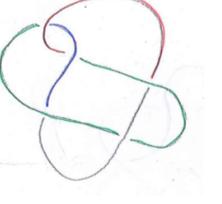
(l) Gefärbtes Knotendiagramm V_1 mit fehlendem letzten Bogen;



(m) Knotendiagramm V_2 mit gefärbtem ersten Bogen;



(n) Knotendiagramm V_2 mit markierter Kreuzung;



(o) Gefärbtes Knotendiagramm V_2 mit fehlendem letzten Bogen;

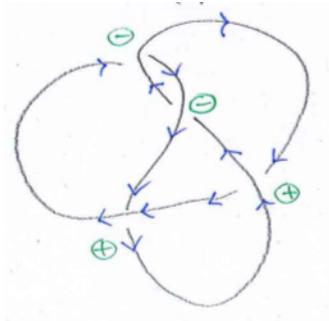
Z_1			$a(Z_1) = 4$ $b(Z_1) = 0$ $ Z_1 = 3$
Z_2			$a(Z_2) = 3$ $b(Z_2) = 1$ $ Z_2 = 2$
Z_3			$a(Z_3) = 3$ $b(Z_3) = 1$ $ Z_3 = 2$
Z_4			$a(Z_4) = 2$ $b(Z_4) = 2$ $ Z_4 = 1$
Z_5			$a(Z_5) = 3$ $b(Z_5) = 1$ $ Z_5 = 2$

Z_6			$a(Z_6) = 2$ $b(Z_6) = 2$ $ Z_6 = 1$
Z_7			$a(Z_7) = 2$ $b(Z_7) = 2$ $ Z_7 = 1$
Z_8			$a(Z_8) = 1$ $b(Z_8) = 3$ $ Z_8 = 2$
Z_9			$a(Z_9) = 3$ $b(Z_9) = 1$ $ Z_9 = 2$
Z_{10}			$a(Z_{10}) = 2$ $b(Z_{10}) = 2$ $ Z_{10} = 1$

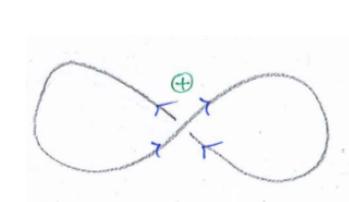
Z_{11}			$a(Z_{11}) = 2$ $b(Z_{11}) = 2$ $ Z_{11} = 1$
Z_{12}			$a(Z_{12}) = 1$ $b(Z_{12}) = 3$ $ Z_{12} = 2$
Z_{13}			$a(Z_{13}) = 2$ $b(Z_{13}) = 2$ $ Z_{13} = 3$
Z_{14}			$a(Z_{14}) = 1$ $b(Z_{14}) = 3$ $ Z_{14} = 2$
Z_{15}			$a(Z_{15}) = 1$ $b(Z_{15}) = 3$ $ Z_{15} = 2$

Z_{16}			$a(Z_{16}) = 0$ $b(Z_{16}) = 4$ $ Z_{16} = 3$
----------	--	--	--

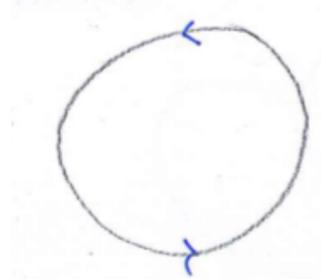
Abbildung 3: Tabelle mit verschiedenen Zuständen zur Verschlingung V ;



(a) Orientierung der Verschlingung V mit Bestimmung der Typen von Überkreuzungen;



(b) Knotendiagramm des trivialen Knoten mit Verdrillungszahl 1;



(c) Trivialer Knoten;

Antwort. Für das doppelte Bracket-Polynom $\langle\langle V \rangle\rangle$ erhalten wir durch Substitution $B \mapsto A^{-1}$, $d \mapsto -A^2 - A^{-2}$. Es gilt dann

$$\begin{aligned} \langle\langle V \rangle\rangle &= (A^4 + 1 + A^{-4})(A^2 + A^{-2})^2 + 4(A^2 + A^{-2})(-A^2 - A^{-2}) + 5 \\ &= (A^4 + 1 + A^{-4} - 4)(A^2 + A^{-2})^2 + 5 = (A^4 - 3 + A^{-4})(A^4 + 2 + A^{-4}) + 5 \\ &= A^8 - A^4 + 1 - A^{-4} + A^{-8}. \end{aligned}$$

Für die Berechnung der Verdrillungszahl $w(V)$ können wir nach obiger Bemerkung eine Orientierung der Verschlingung V wählen, da es sich um einen Knoten handelt. Wir wählen die Orientierung entsprechend Abbildung 4a und erhalten $w(V) = 0$. Für die umgekehrte Orientierung \bar{V} gilt ebenfalls $w(\bar{V}) = 0$. Damit gilt dann

$$J_V(A) = \langle\langle V \rangle\rangle = A^8 - A^4 + 1 - A^{-4} + A^{-8}.$$

- c) *Zeigen oder widerlegen Sie:* Die Verdrillungszahl eines orientierten Verschlingungsdiagrammes hängt nur von der durch das Verschlingungsdiagramm bestimmten Äquivalenzklasse ab.

Antwort. Dass die obige Aussage falsch ist, kann man leicht einsehen, wenn man an eine Reidemeisterbewegung von Typ 1 denkt. Die Verschlingungsdiagramme aus Abbildungen 4b und 4c repräsentieren die gleiche Äquivalenzklasse von Verschlingungen, da das eine aus dem anderen durch eine Reidemeisterbewegung von Typ 1 hervorgeht. Die Verdrillungszahl von Diagramm 4b beträgt aber 1 und von Diagramm 4c 0.

Aufgabe 7 (4+4 Punkte).

- a) Betrachten Sie die disjunkte Vereinigung X_1 der Polygone aus Abbildung 7a und die Äquivalenzrelation R_1 , die durch die Markierung der Kanten definiert wird. *Zeigen oder widerlegen Sie anschaulich:* Der Quotientenraum X_1/R_1 ist eine geschlossene Fläche. *Falls Sie zu dem Entschluss kommen, dass X_1/R_1 eine geschlossene Fläche ist, so geben Sie an zu welcher geschlossenen Fläche F_g beziehungsweise F'_g aus der Vorlesung X_1/R_1 homöomorph ist.*

Antwort. Identifizieren wir zunächst die grün markierten Seiten miteinander, so erhalten wir ein regelmäßiges 6-Eck, mit der Identifizierungsvorschrift wie in Abbildung 5. Wir sehen schnell, dass die Identifizierungsvorschrift genau der Identifizierungsvorschrift der Fläche F'_3 aus der Vorlesung entspricht. Das heißt, der Quotientenraum X_1/R_1 ist eine geschlossene Fläche und homöomorph zu F'_3 .

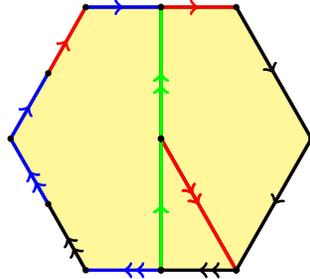


Abbildung 5: Abbildung zur Illustration der Lösung von Aufgabe 7 a);

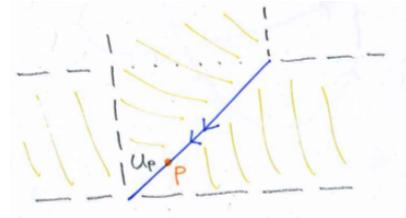
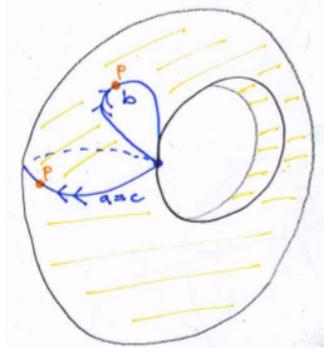
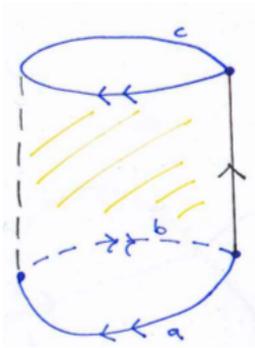
- b) Betrachten Sie das Polygon X_2 aus Abbildung 7b und die Äquivalenzrelation R_2 , die durch die Markierung der Kanten definiert wird. *Zeigen oder widerlegen Sie anschaulich:* Der Quotientenraum X_2/R_2 ist eine geschlossene Fläche.

Antwort. Identifiziert man zunächst die schwarzen Seiten miteinander, so erhält man einen Zylinder, siehe Abbildung 6a, wobei der untere Rand in orientierte Segmente a und b geteilt ist, die wir später noch miteinander identifizieren. Den oberen Rand bezeichnen wir mit c . Identifizieren wir dann zwei weitere Seiten miteinander, sagen wir a mit c , erhalten wir einen Torus mit einer herausgeschnittenen offenen Scheibe. Der Rand der offenen Kreisscheibe ist über die letzte zu identifizierende Seite b parametrisiert. Identifizieren wir im letzten Schritt die Kreislinie b mit der blauen Kreislinie und betrachten einen Punkt p auf der blauen Kreislinie des Quotientenraumes, so sieht eine Umgebung U_p von p entsprechend Abbildung 6c aus. Ist U_p klein genug, so ist U_p homöomorph zu $T_{ri} = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R}\} \cup \{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y \in \mathbb{R}, z \geq 0\}$. Man kann sich anschaulich überlegen, dass T_{ri} nicht homöomorph zu \mathbb{R}^2 ist.

Viel Erfolg!

A Universelle Entwirrungsinvarianten $\Gamma(V_1)$ und $\Gamma(V_2)$

1. Zur Berechnung von $\Gamma(V_1)$ wählen wir eine Orientierung des Knotens und eine Kreuzung entsprechend Abbildung 8a und bestimmen den zugehörigen Kreuzungstyp als positiven Typ. Wir ändern den Typ entsprechend den Verschlingungen $V_{1,-}$, $V_{1,0}$ ab, siehe Abbildungen 8b, 8c. Wir sehen, dass $V_{1,-}$ nach einer Reidemeisterbewegung von Typ 2 der *linksdrehende Kleeblattknoten* ist, siehe Abbildung 8d. $V_{1,0}$ ist eine

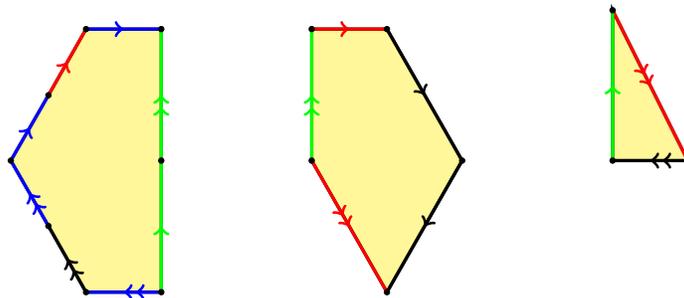


(a) Identifizierung der beiden schwarzen Seiten;

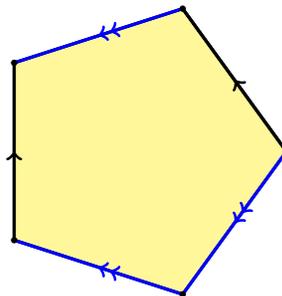
(b) Identifizierung der Seite a mit der Seite c ;

(c) Eine Umgebung von x ist nicht homöomorph zu \mathbb{R}^2 ;

Abbildung 6: Abbildung zur Illustration der Lösung von Aufgabe 7 b);



(a) Disjunkte Vereinigung X_1 von drei Polygonen mit markierten Kanten;



(b) Polygon X_2 mit Markierung von Kanten;

Verschlingung und bedarf weiterer Untersuchung. Wir wählen eine weitere Kreuzung in $V_{1,0}$ entsprechend Abbildung 8e und bestimmen den Kreuzungstyp als positiv. Innerhalb der eingezeichneten Scheibe ändern wir die Kreuzung ab und erhalten Verschlingungen $V_{1,0,-}$ und $V_{1,0,0}$, siehe Abbildungen 8f und 8g. $V_{1,0,-}$ ist nach einer Reidemeisterbewegung von Typ 2 die Hopfverschlingung H , siehe Abbildung 8h. $V_{1,0,0}$ ist der linksdrehende Kleeblattknoten ι_{LK} , siehe Abbildung 8i. Aus der Vorlesung kennen wir die Werte

$$\Gamma(\iota_{LK}) = -2\frac{a_-}{a_+} + \frac{a_0^2}{a_+^2} - \frac{a_-^2}{a_+^2} = -2\frac{a_-}{a_+} + \frac{a_0^2 - a_-^2}{a_+^2}; \quad \Gamma(H) = -\frac{a_0}{a_+} + \frac{a_-}{a_0} + \frac{a_-^2}{a_+a_0}.$$

Mit

$$\begin{aligned} \Gamma(V_1) &= -\frac{a_- \Gamma(V_{1,-}) + a_0 \Gamma(V_{1,0})}{a_+} = -\frac{a_- \Gamma(\iota_{LK}) + a_0 \Gamma(V_{1,0})}{a_+}; \\ \Gamma(V_{1,0}) &= -\frac{a_- \Gamma(V_{1,0,-}) + a_0 \Gamma(V_{1,0,0})}{a_+} = -\frac{a_- \Gamma(H) + a_0 \Gamma(\iota_{LK})}{a_+} \end{aligned}$$

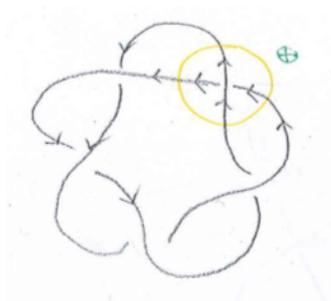
folgt dann

$$\begin{aligned} \Gamma(V_1) &= -\frac{a_- \Gamma(\iota_{LK}) - a_0 \frac{a_- \Gamma(H) + a_0 \Gamma(\iota_{LK})}{a_+}}{a_+} = -\frac{a_- a_+ \Gamma(\iota_{LK}) - a_0 a_- \Gamma(H) - a_0^2 \Gamma(\iota_{LK})}{a_+} \\ &= -\frac{(a_- a_+ - a_0^2) \Gamma(\iota_{LK}) - a_0 a_- \Gamma(H)}{a_+^2} = \frac{(a_0^2 - a_- a_+) \Gamma(\iota_{LK}) + a_0 a_- \Gamma(H)}{a_+^2}. \end{aligned}$$

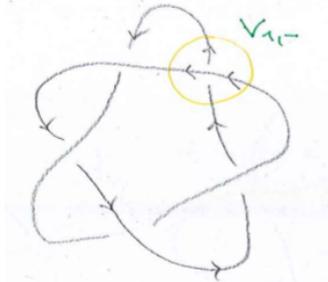
Für das Jonespolynom J_1 erhalten wir somit

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{(A^4 - 1 + A^{-4})(A^{-4} + A^{-12} - A^{-16}) + (-A^{-16} + A^{-12} - A^{-8} + A^{-4})}{A^8} \\ &= A^{-8}(1 + A^{-8} - A^{-12} + A^{-16} - A^{-20}) = A^{-8} + A^{-16} - A^{-20} + A^{-24} - A^{-28}. \quad (1) \end{aligned}$$

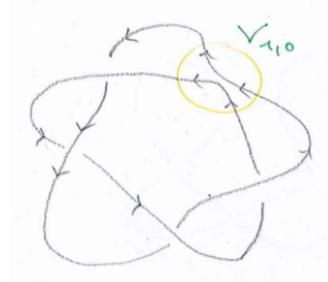
2. Zur Berechnung von $\Gamma(V_2)$ wählen wir eine Orientierung des Knotens und eine Kreuzung entsprechend Abbildung 9a und bestimmen den zugehörigen Kreuzungstyp als positiven Typ. Ändern wir die Kreuzung innerhalb der eingezeichneten Scheibe zu einer Kreuzung von negativem beziehungsweise neutralem Typ ab, so erhalten wir Verschlingungen $V_{2,-}$ beziehungsweise $V_{2,0}$, siehe Abbildungen 9b und 9c. $V_{2,-}$ entspricht dem trivialen Knoten, wie man durch eine Reidemeisterbewegung von Typ 2 und drei Reidemeisterbewegungen von Typ 1 sehen kann. $V_{2,0}$ ist eine nicht-triviale Verschlingung von zwei trivialen Knoten und bedarf weiterer Inspektion. In Abbildung 9c haben wir bereits eine neue Scheibe eingezeichnet, in der wir die Verschlingung abändern wollen. Der Kreuzungstyp dor ist positiv. Diese Kreuzung ändern wir zu einer Kreuzung von negativem Typ $V_{2,0,-}$ und neutralem Typ $V_{2,0,0}$ ab, siehe Abbildungen 9d und 9d. Nach einer Reidemeisterbewegung von Typ 2 entspricht $V_{2,0,-}$ der Hopfverschlingung. $V_{2,0,0}$ entspricht nach drei Reidemeisterbewegungen von Typ 1 dem



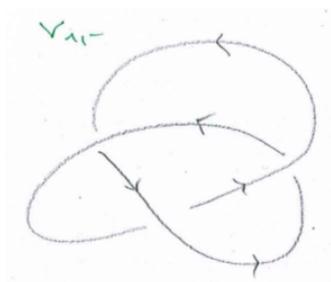
(a) Wahl der ersten Kreuzung in V_1 mit Bestimmung des Typs;



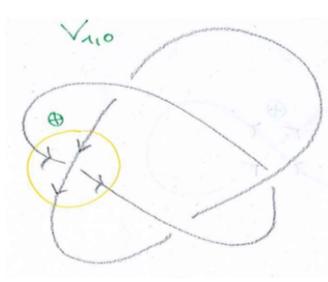
(b) Erste Kreuzung in V_1 geändert zu Verschlingung $V_{1,-}$ mit negativem Typ;



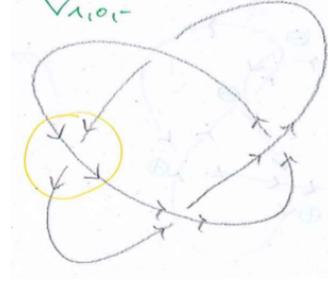
(c) Erste Kreuzung in V_1 geändert zu Verschlingung $V_{1,0}$ mit neutralem Typ;



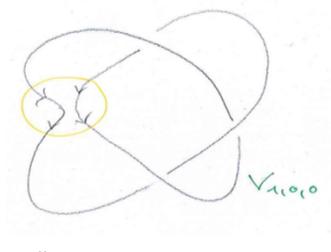
(d) $V_{1,-}$ ist der linksdrehende Kleeblattknoten;



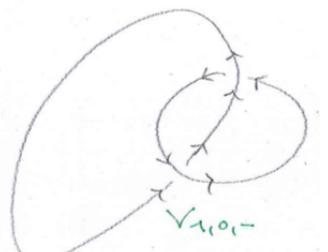
(e) Eingezeichnete Scheibe in $V_{1,0}$;



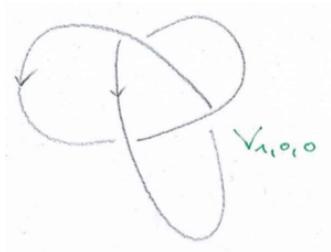
(f) Änderung der Kreuzung in $V_{1,0}$ zu $V_{1,0,-}$ mit negativer Kreuzung;



(g) Änderung der Kreuzung in $V_{1,0}$ zu $V_{1,0,0}$ mit neutraler Kreuzung;



(h) $V_{1,0,-}$ ist Hopfverschlingung;



(i) $V_{1,0,0}$ ist u_K ;

Abbildung 8: Verschlingungsdiagramme zur Bestimmung der universellen Entwirrungsinvariante $\Gamma(V_1)$;

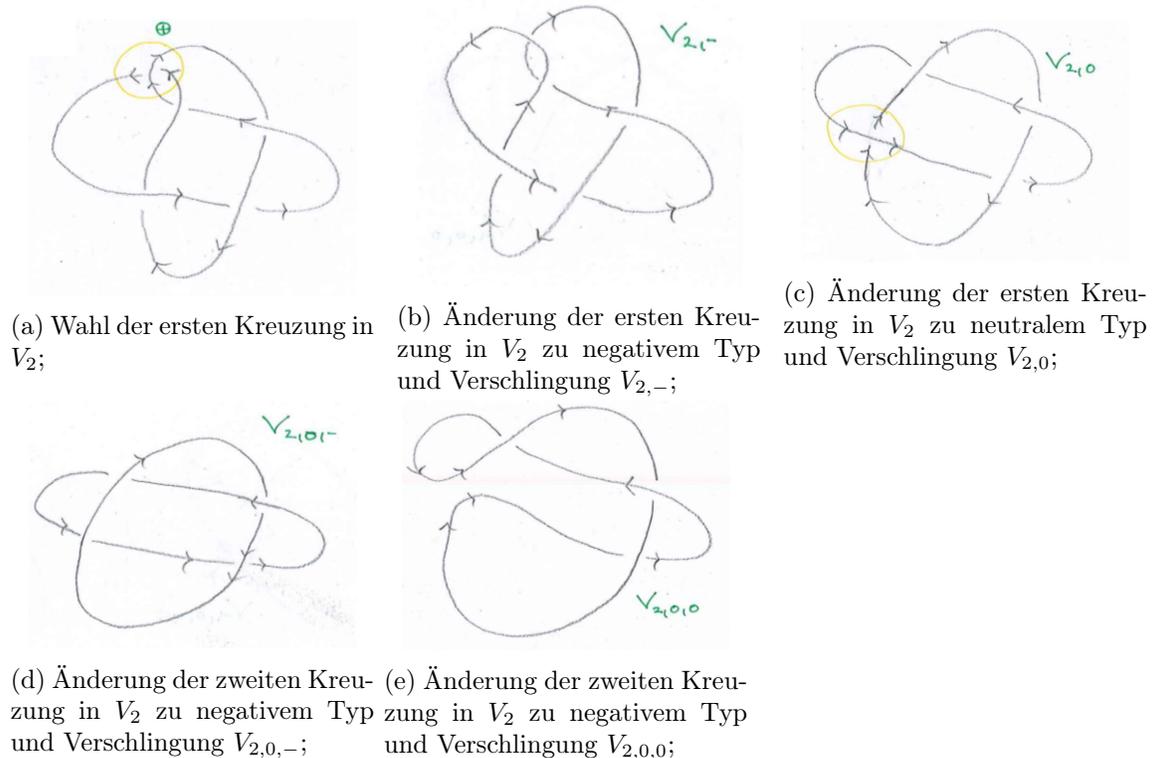


Abbildung 9: Verschlingungsdiagramme zur Bestimmung der universellen Entwirrungsinvariante $\Gamma(V_2)$;

trivialen Knoten. Für die universelle Entwirrungsinvariante $\Gamma(V_2)$ erhalten wir also

$$\Gamma(V_2) = -\frac{a_- \Gamma(V_{2,-}) + a_0 \Gamma(V_{2,0})}{a_+} = -\frac{a_- + a_0 \Gamma(V_{2,0})}{a_+};$$

$$\Gamma(V_{2,0}) = -\frac{a_- \Gamma(V_{2,0,0}) + a_0 \Gamma(V_{2,0,-})}{a_+} = -\frac{a_- \Gamma(H) + a_0}{a_+};$$

und mit $\Gamma(H) = -\frac{a_0}{a_+} + \frac{a_-}{a_0} + \frac{a_-^2}{a_+ a_0}$ folgt für das Jonespolynom J_2 dann

$$\begin{aligned} J_2 &= (-A^{-4})((-A^{-4}) + (A^2 - A^{-2})(-A^{-10} - A^{-18} - A^{-2} + A^{-6})) \\ &= A^{-8} - A^{-16} - A^{-24} - A^{-8} + A^{-12} + A^{-12} + A^{-20} + A^{-4} - A^{-8} \\ &= A^{-4} - A^{-8} + 2A^{-12} - A^{-16} + A^{-20} - A^{-24}. \end{aligned} \quad (2)$$