Lösungsskizzen zu den Übungsaufgaben

# Elemente der Topologie

**Blatt 13** M. Joachim & R. Loose

Wintersemester 2017/2018 Keine Abgabe

---

**Aufgabe 36** (Beispiel eines nicht plättbaren Graphen)**.** *Zeigen Sie, dass ein schlichter Graph $\mathcal{G}$ mit nachfolgender Nachbarschaftstafel nicht plättbar ist.*

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | × | | × | × | | | | × |
| 2 | × | | × | | × | × | × | | × |
| 3 | | × | | | | × | | | |
| 4 | × | | | | × | | × | × | × |
| 5 | × | × | | × | | × | | | |
| 6 | | × | × | | × | | × | × | × |
| 7 | | × | | × | | × | | × | |
| 8 | | | | × | | × | × | | × |
| 9 | × | × | | × | | × | | × | |

*Beweis.* Diese Aufgabe lässt sich mit dem *Satz von Kuratowski*, siehe Vorlesungsnotizen Seite 88, beweisen, da $\mathcal{G}$ eine Unterteilung $\mathcal{G}'$ des Graphen $\mathcal{K}_5$ als Untergraphen enthält. Ein zugehöriges Graphendiagramm für $\mathcal{G}'$ ist in Abbildung 1 zu finden. □

**Definition.** Die *Eckenordnung* $ord(P)$ *einer Ecke* $P$ in einem Graphen ist die Anzahl der Kanten, die $P$ als eine Ecke besitzen, wobei Schlingen, die $P$ mit $P$ verbinden, jeweils als zwei Kanten gezählt werden.

**Aufgabe 37** (Plättbare Graphen der Ordnung 7)**.** Sei $\mathcal{G}$ nun ein Graph mit Eckenmenge $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ und Eckenordnungen $ord(i) = i$. *Zeigen Sie, dass* $\mathcal{G}$ *ein plättbarer Graph ist.*

*Beweis.* Auch diese Aufgabe können wir mit dem Satz von Kuratowski lösen, denn danach ist ein Graph $\mathcal{G}$ genau dann plättbar, wenn er weder eine Unterteilung des Graphen $\mathcal{K}_5$, noch eine Unterteilung des Graphen $\mathcal{K}_{3,3}$ als Untergraphen enthält. Um Unterteilungen von $\mathcal{K}_5$ oder $\mathcal{K}_{3,3}$ als Untergraphen besitzen zu können, müssen mindestens 5 Ecken in $\mathcal{G}$ Eckenordnung 4 haben beziehungsweise mindestens 6 Ecken mindestens Eckenordnung 3 haben. Dies trifft aber auf $\mathcal{G}$ nicht zu. □

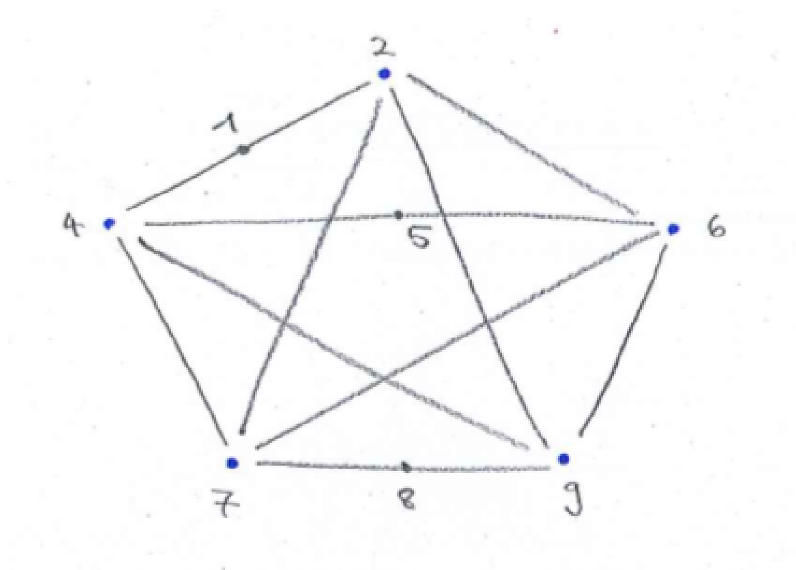



Abbildung 1: Graphendiagramm eines Untergraphen von $\mathcal{G}$, der Unterteilung von $\mathcal{K}_5$ ist;

**Aufgabe 38** (Bäume der Ordnung 5)**.** *Bestimmen Sie alle Isomorphietypen von Bäumen der Ordnung* 5*. Geben Sie dazu für jeden Isomorphietyp ein Beispiel an.*

*Antwort.* Es gibt 3 verschiedene Isomorphietypen von Bäumen der Ordnung 5. Beispiele für jeweils einen Isomorphietyp sind in Abbildung 2 abgebildet. Man kann sich schnell überlegen, dass ein Baum der Ordnung 5 genau 4 Kanten hat. Denn ein Baum der Ordnung 5 muss mindestens 4 Kanten haben, ansonsten wäre er nicht zusammenhängend. Dass die Kantenzahl genau 4 ist, kann man mit der Eulerformel sehen, da die Flächenzahl eines planaren Graphendiagramms eines Baumes stets 1 ist. (Wir sehen sogar im Allgemeinen, dass ein Baum der Ordnung $n$ genau $n-1$ Kanten hat.) Die verschiedenen Isomorphieklassen werden durch die maximale Eckenordnung eindeutig beschrieben. Bäume der Ordnung 5 mit maximaler Eckenordnung 2, 3 beziehungsweise 4 sind isomorph zum Baum $B_2$, $B_3$ beziehungsweise $B_4$, wobei die Bäume $B_2, B_3, B_4$ unten definiert werden. Dass die Bäume $B_2, B_3, B_4$ paarweise nicht isomorph sind, folgt daraus, dass Isomorphismen zwischen Graphen Ecken mit Eckenordnung $o$ auf Ecken mit Eckenordnung $o$ schicken müssen.

a) Definiere $B_2 = (E_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}, K_1 = \{k_{1,2}, k_{2,3}, k_{3,4}, k_{4,5}\}, f_1)$ mit

$$f_1 : K_1 \longrightarrow E_1^{(2)}, f_1(k_{1,2}) = [1, 2], f_1(k_{2,3}) = [2, 3], f_1(k_{3,4}) = [3, 4], f_1(k_{4,5}) = [4, 5].$$

Sei $\mathcal{G}_1 = (E'_1, K'_1, f'_1)$ ein Baum der Ordnung 5 mit maximaler Eckenordnung 2. Dann gibt es eine Ecke $P \in E'_1$ mit Eckenordnung 2, deren Nachbarn $P_1, P_2$ ebenfalls Eckenordnung 2 haben, denn sonst wäre $\mathcal{G}_1$ nicht zusammenhängend. Da es genau 4

Kanten gibt, gibt es genau eine solche Ecke $P$. Seien $k_1, k_2 \in K_1', k_1 \neq k_2$ mit $f_1'(k_1) = [P, P_1], f_1'(k_2) = [P, P_2]$, $k_3, k_4 \in K_1' \setminus \{k_1, k_2\}$ mit $f_1'(k_3) = [P_1, P_3], f_2'(k_4) = [P_2, P_4]$ mit $P_3, P_4 \in E_1'$. Da $\mathcal{G}_1$ ein Baum ist, sind $P, P_1, P_2, P_3, P_4$ paarweise verschieden.

$$\Phi_1 : E_1 \longrightarrow E_1', \Phi_1(1) = P_3, \Phi_1(2) = P_1, \Phi_1(3) = P, \Phi_1(4) = P_2, \Phi_1(5) = P_4;$$
$$\psi_1 : K_1 \longrightarrow K_1', \psi_1(k_{1,2}) = k_3, \psi_1(k_{2,3}) = k_1, \psi_1(k_{3,4}) = k_2, \psi_1(k_{4,5}) = k_4;$$

definiert einen Isomorphismus von $B_2$ nach $\mathcal{G}_1$.

b) Definiere $B_3 = (E_2 = \{1,2,3,4,5\}, K_2 = \{k_{1,3}, k_{2,3}, k_{3,4}, k_{4,5}\}, f_2)$ mit

$$f_2 : K_2 \longrightarrow E_2^{(2)}, f_2(k_{1,3}) = [1,3], f_1(k_{2,3}) = [2,3], f_1(k_{3,4}) = [3,4], f_1(k_{4,5}) = [4,5].$$

Sei $\mathcal{G}_2 = (E_2', K_2', f_2')$ ein Baum der Ordnung 5 mit maximaler Eckenordnung 3. Dann gibt es genau eine Ecke $P' \in E_2'$ mit $ord(P') = 3$. Außerdem gibt es genau eine benachbarte Ecke $P_1'$ von $P'$ mit $ord(P') = 2$, denn sonst wäre $\mathcal{G}_2$ nicht zusammenhängend. Seien $l_1 \in K_2'$ mit $f_2'(l_1) = [P', P_1']$, $l_2, l_3 \in K_2' \setminus \{l_1\}, l_2 \neq l_3$ mit $f_2'(l_2) = [P, P_2'], f_2'(l_3) = [P, P_3']$ für $P_2', P_3' \in E_2'$ und $P', P_1', P_2', P_3' \in E_2'$ paarweise verschieden. Sei $l_4 \in K_2' \setminus \{l_1, l_2, l_3\}$ mit $f_2'(l_4) = [P_1', P_4']$. Dann sind $P', P_1', P_2', P_3', P_4'$ paarweise verschieden und

$$\Phi_2 : E_2 \longrightarrow E_2', \Phi_2(1) = P_2', \Phi_2(2) = P_3', \Phi_2(3) = P', \Phi_2(4) = P_1', \Phi_2(5) = P_4';$$
$$\psi_2 : K_2 \longrightarrow K_2', \psi_2(k_{1,3}) = l_2, \psi_2(k_{2,3}) = l_3, \psi_2(k_{3,4}) = l_1, \psi_2(k_{4,5}) = l_4;$$

definiert einen Isomorphismus von $B_3$ nach $\mathcal{G}_2$.

c) Definiere $B_4 = (E_3 = \{1,2,3,4,5\}, K_3 = \{k_{1,2}, k_{1,3}, k_{1,4}, k_{1,5}\}, f_3)$ mit

$$f_3 : K_3 \longrightarrow E_3^{(2)}, f_3(k_{1,2}) = [1,2], f_3(k_{1,3}) = [1,3], f_3(k_{1,4}) = [1,4], f_3(k_{1,5}) = [1,5].$$

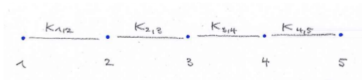
Seien $\mathcal{G}_3 = (E_3', K_3', f_3')$ ein Baum der Ordnung 5 mit maximaler Eckenordnung 4 und $\widetilde{P} \in E_3'$ mit $ord(\widetilde{P}) = 4$. Es folgt sofort, dass alle anderen Ecken Eckenordnung 1 haben, da $\mathcal{G}_3$ ein Baum ist. Seien $E_3' = \{\widetilde{P}, \widetilde{P}_{i_1}, \widetilde{P}_{i_2}, \widetilde{P}_{i_3}, \widetilde{P}_{i_4}\}, K_3' = \{m_1, m_2, m_3, m_4\}$ mit

$$f_3'(m_1) = [\widetilde{P}, \widetilde{P}_{i_1}], f_3'(m_2) = [\widetilde{P}, \widetilde{P}_{i_2}], f_3'(m_3) = [\widetilde{P}, \widetilde{P}_{i_3}], f_3'(m_4) = [\widetilde{P}, \widetilde{P}_{i_4}].$$

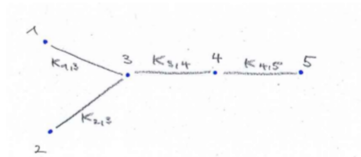
Definiere

$$\Phi_3 : E_3 \longrightarrow E_3', \Phi(1) = \widetilde{P}, \Phi(2) = \widetilde{P}_{i_1}, \Phi(3) = \widetilde{P}_{i_2}, \Phi(4) = \widetilde{P}_{i_3}, \Phi(5) = \widetilde{P}_{i_4};$$
$$\psi_3 : K_3 \longrightarrow K_3', \psi(k_{1,2}) = m_1, \psi(k_{1,3}) = m_2, \psi(k_{1,4}) = m_3, \psi(k_{1,5}) = m_4.$$

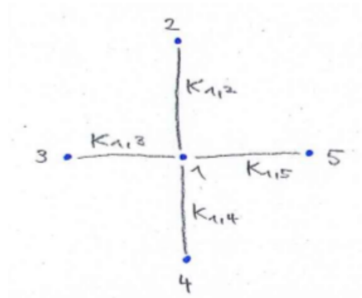
Es folgt, dass $(\Phi_3, \psi_3)$ ein Isomorphismus von $B_4$ nach $\mathcal{G}_3$ ist.




(a) Graphendiagramm zu $B_2$;




(b) Graphendiagramm zu $B_3$;




(c) Graphendiagramm zu $B_4$;

Abbildung 2: Graphendiagramme zu Bäumen der Ordnung 5;

**Bonusaufgabe** (Zusammenhängende Untergraphen)**.** *Zeigen Sie, dass es in einem zusammenhängenden Graphen der Ordnung $n$ zu jedem $1 \leq k \leq n$ einen zusammenhängenden Untergraphen der Ordnung $k$ gibt.*

*Beweis.* Die Bonusaufgabe wurde in der Vorlesung im ersten Punkt eines Lemmas, siehe in den Vorlesungsnotizen Seite 84, gelöst. $\square$