Lösungsskizzen zu den Übungsaufgaben

Elemente der Topologie

Blatt 12 M. Joachim & R. Loose

Wintersemester 2017/2018 Abgabe: Freitag, den 19.1.2018, 10:00 Uhr

---

Aufgabe 33 (Nachbarschaftstafel für Graph mit 3 Ecken und 4 Kanten)**.** *Geben Sie fünf verschiedene Graphen mit Eckenmenge* $E = \{A, B, C\}$ *und Kantenmenge* $K = \{a, b, c, d\}$ *an, die alle zu der folgenden Nachbarschaftstafel passen.*

	A	B	C
A	$\times$	$\times$	
B	$\times$		$\times$
C		$\times$	

Antwort. In jedem Graphen müssen Kanten zwischen A und A, A und B, B und C entsprechend der Nachbarschaftstafel verlaufen. Wie die Kanten gelabelt sind und wo wir *die* 4. *Kante* hinsetzen ist frei wählbar.

a) Definiere $\mathcal{G}_1 = \{E_1, K_1, f_1\}$ mit $E_1 := E, K_1 = K$ und

$$f_1 : K \longrightarrow E^{(2)}, f_1(a) = [A, A], f_1(b) = [A, B], f_1(c) = [B, C], f_1(d) = [A, A].$$

b) Definiere $\mathcal{G}_2 = \{E_2, K_2, f_2\}$ und

$$f_2 : K \longrightarrow E^{(2)}, f_2(a) = [A, A], f_2(b) = [A, B], f_2(c) = [B, C], f_2(d) = [A, B].$$

c) Definiere $\mathcal{G}_3 = \{E_3, K_3, f_3\}$ und

$$f_3 : K \longrightarrow E^{(2)}, f_3(a) = [A, A], f_3(b) = [A, B], f_3(c) = [B, C], f_3(d) = [B, C].$$

d) Definiere $\mathcal{G}_4 = \{E_4, K_4, f_4\}$und

$$f_4 : K \longrightarrow E^{(2)}, f_3(a) = [A, A], f_3(b) = [A, B], f_3(c) = [A, A], f_3(d) = [B, C].$$

e) Definiere $\mathcal{G}_5 = \{E_5, K_5, f_5\}$und

$$f_5 : K \longrightarrow E^{(2)}, f_3(a) = [A, A], f_3(b) = [A, B], f_3(c) = [A, B], f_3(d) = [B, C].$$

Aufgabe 34 (Untergraphen von $\mathcal{K}_4$)**.** *Bestimmen Sie die Anzahl der Untergraphen der Ordnung* 4 *im vollständigen Graphen* $\mathcal{K}_4$.

Antwort. Für $\mathcal{K}_4 = (E_4 = \{1, 2, 3, 4\}, K_4 = \{k_{1,2}, k_{1,3}, k_{1,4}, k_{2,3}, k_{2,4}, k_{3,4}, f)$ mit $f(k_{i,j}) = [i, j]$ gilt insbesondere $|K_4| = 6$. Da wir die Untergraphen $\mathcal{G}' = (E', K', f|_{K'})$ der Ordnung 4 bestimmen sollen, gilt schon $E' = E_4$. Bei der Wahl der Kanten sind wir frei und so dürfen wir aus K_4 nach und nach 0-elementige Teilmengen, 1-elementige Teilmengen, $\ldots$, 6-elementige Teilmengen wählen. Die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Teilmenge ist bekanntlich $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$. Die Binomialkoeffizieten addieren wir und erhalten die Anzahl

$$\sum_{i=0}^{6} \binom{6}{i} = 1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 64$$

der Untergraphen der Ordnung 4 im vollständigen Graphen $\mathcal{K}_4$.

Aufgabe 35 (Zusammenhangskomponenten und Zerlegung eines Graphen)**.** Der Graph (E, K, f) mit Eckenmenge $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ und Kantenmenge $K = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ sei durch folgende Inzidenztafel gegeben.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a	×	×							
b	×								×
c						×		×	
d				×		×			
e	×				×				
f		×							×
g				×				×	

Geben Sie die Anzahl der Zusammenhangskomponenten an und bestimmen Sie die Zusammenhangskomponente mit der größten Ordnung. Wieviele Zerlegungen besitzt der Graph?

Antwort. Die Zusammenhangskomponenten sind

$$\mathcal{G}_1 = (E_1 = \{1, 2, 5, 9\}, K_1 = \{a, b, e, f\}, f_1) \text{ mit } f_1(a) = [1, 2], f_1(b) = [1, 9], f_1(e) = [1, 5], f_1(f) = [2, 9];$$

$$\mathcal{G}_2 = (E_2 = \{4, 6, 8\}, K_2 = \{c, d, g\}, f_2) \text{ mit } f_2(c) = [6, 8], f_2(d) = [4, 6], f_2(g) = [4, 8];$$

$$\mathcal{G}_3 = (E_3 = \{3\}, K_3 = \emptyset, f_3), \mathcal{G}_4 = (E_4 = \{7\}, K_4 = \emptyset, f_4),$$

wobei $f_3 : \emptyset \longrightarrow E_3^{(2)}, f_4 : \emptyset \longrightarrow E_4^{(2)}$ jeweils die *leere Funktion* sind. Die Anzahl der Zusammenhangskomponenten beträgt also 4 und $\mathcal{G}_1$ ist die Zusammenhangskomponente mit der größten Ordnung. Die möglichen Zerlegungen sind

$$\{1,2,5,9\},\{4,6,8\},\{3\},\{7\};\{1,2,4,5,6,8,9\},\{3\},\{7\};\{1,2,4,5,6,8,9\},\{3,7\};$$
$$\{1,2,3,5,9\},\{4,6,8\},\{7\};\{1,2,3,5,9\},\{4,6,7,8\};\{1,2,5,7,9\},\{4,6,8\},\{3\};$$
$$\{1,2,5,7,9\},\{3,4,6,8\};\{1,2,5,9\},\{3,4,6,8\},\{7\};\{1,2,5,9\},\{4,6,7,8\},\{3\};$$
$$\{1,2,5,9\},\{4,6,8\},\{3,7\};\{1,2,3,4,5,6,8,9\},\{7\};\{1,2,4,5,6,7,8,9\},\{3\};$$
$$\{1,2,3,5,7,9\},\{4,6,8\};\{1,2,5,9\},\{3,4,6,7,8\};\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}.$$

Damit beträgt die Anzahl der Zerlegungen 15.

Definition. *Eine Brücke* in einem zusammenhängenden Graph ist eine Kante mit der Eigenschaft, dass der Graph in zwei Zusammenhangskomponenten zerfällt, wenn man diese Kante herausnimmt.

Bonusaufgabe (Schlichte Graphen der Ordnung 4 ohne Brücke)**.** *Zeigen Sie, dass es bis auf Isomorphie genau drei zusammenhängende schlichte Graphen der Ordnung* 4 *gibt, die keine Brücke besitzen.*

Beweis. Wir wollen in dieser Aufgabe gerne den Begriff der *Eckenordnung einer Ecke* in einem Graphen benutzen.

Definition. Die *Eckenordnung* $ord(P)$ *einer Ecke* P in einem Graphen ist die Anzahl der Kanten, die P als eine Ecke besitzen, wobei Schlingen, die P mit P verbinden, jeweils als zwei Kanten gezählt werden.

Man macht sich schnell klar, dass jede Ecke in einem zusammenhängenden Graphen ohne Brücken mindestens Eckenordnung 2 hat. Denn hat eine Ecke P Eckenordnung $ord(P) = 0$, so ist der Graph nicht zusammenhängend, hat eine Ecke Q Eckenordnung $ord(Q) = 1$, ist die Kante, die Q als Ecke besitzt, eine Brücke. Außerdem gibt es keine Schlingen, da der Graph schlicht ist. Liegt ein schlichter Graph der Ordnung 4 vor, hat jede Ecke maximal Eckenordnung 3, ansonsten wäre der Graph nicht schlicht. Ein schlichter, zusammenhängender Graph der Ordnung 4 ohne Brücken hat also 4 Kanten, wenn jede Ecke P Eckenordnung 2 hat, 5 Kanten, wenn zwei Ecken Eckenordnung 2 und zwei Ecken Eckenordnung 3 haben oder 6 Kanten, wenn alle Ecken Eckenordnung 3 haben. In den drei Fällen sind die jeweiligen Graphen isomorph zu den Graphen $\mathcal{G}_0, \mathcal{G}_1$ oder $\mathcal{G}_2$, zu denen Graphendiagramme in den Abbildungen 1 zu finden sind. Den ersten Fall führen wir exemplarisch durch. Die anderen beiden Fällen folgen analog. Aufgrund der verschiedenen Kantenanzahl ist klar, dass $\mathcal{G}_0, \mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ paarweise nicht isomorph sind.

a) Definiere $\mathcal{G}_0 = (E_0 = \{1, 2, 3, 4\}, K_0 = \{k_{1,2}, k_{1,3}, k_{2,4}, k_{3,4}\}, f_0)$ mit

$$f_0(k_{i,j}) = [i, j], \qquad \text{für } k_{i,j} \in K_0.$$

Sei jetzt $\mathcal{G} = (E = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}, K, f)$ ein schlichter, zusammenhängender Graph der Ordnung 4 mit 4 Kanten. Da jede Ecke mindestens Eckenordnung 2 hat und es genau 4 Kanten gibt, hat jede Ecke genau Eckenordnung 2. Seien $k_1, k_2 \in K$ Kanten, die E_1 als Ecke haben. Da $\mathcal{G}$ schlicht ist, gilt $k_1 \neq k_2$. Seien $E_{i_1}, E_{i_2} \in E$ Ecken mit $f(k_1) = [E_1, E_{i_1}], f(k_2) = [E_2, E_{i_2}]$. Da $\mathcal{G}$ schlicht ist, sind E_1, E_{i_1}, E_{i_2} paarweise verschieden. Seien $\widetilde{E} \in E$ mit $\widetilde{E} \neq E_1, E_{i_1}, E_{i_2}$ und $k_3, k_4 \in K$, sodass k_3, k_4 die Ecke $\widetilde{E}$ als Ecke haben. Da $\mathcal{G}$ schlicht ist, gilt $k_3 \neq k_4$ und für die Ecken $E_{i_3}, E_{i_4} \in E$ mit $f(k_3) = [\widetilde{E}, E_{i_3}], f(k_4) = [\widetilde{E}, E_{i_4}]$ sind $\widetilde{E}, E_1, E_{i_3}, E_{i_4}$ paarweise verschieden, da $\mathcal{G}$ schlicht ist und E_1 Eckenordnung 2 hat. Es gilt also $\{E_{i_1}, E_{i_2}\} = \{E_{i_3}, E_{i_4}\}$. Gelte ohne Beschränkung der Allgemeinheit $E_{i_1} = E_{i_3}, E_{i_2} = E_{i_4}$. Der andere Fall folgt analog. Definiere Abbildungen

$$\Phi : E_0 \longrightarrow E, \Phi(1) = E_1, \Phi(2) = E_{i_1}, \Phi(3) = E_{i_2}, \Phi(4) = \widetilde{E};$$
$$\psi : K_0 \longrightarrow K, \psi(k_{1,2}) = k_1, \psi(k_{1,3}) = k_2, \psi(k_{2,4}) = k_3, \psi(k_{3,4}) = k_4.$$

Es folgt, dass (Φ, ψ) ein Isomorphismus von $\mathcal{G}_0$ nach $\mathcal{G}$ ist.

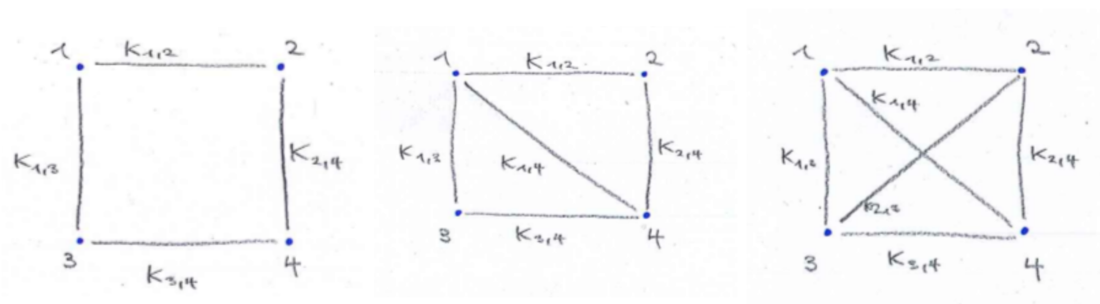
b) Definiere $\mathcal{G}_0 = (E_0 = \{1, 2, 3, 4\}, K_0 = \{k_{1,2}, k_{1,3}, k_{2,4}, k_{3,4}\}, f_0)$ mit

$$f_0(k_{i,j}) = [i, j], \qquad \text{für } k_{i,j} \in K_0.$$

c) Definiere $\mathcal{G}_0 = (E_0 = \{1, 2, 3, 4\}, K_0 = \{k_{1,2}, k_{1,3}, k_{2,4}, k_{3,4}\}, f_0)$ mit

$$f_0(k_{i,j}) = [i, j], \qquad \text{für } k_{i,j} \in K_0.$$

$\square$



(a) Graphendiagramm zu $\mathcal{G}_0$; (b) Graphendiagramm zu $\mathcal{G}_1$; (c) Graphendiagramm zu $\mathcal{G}_2$;

Abbildung 1: Graphendiagramme zu den Graphen $\mathcal{G}_0, \mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$;