Aufgaben zur Vorlesung
Elemente der Topologie

Blatt 9 | M. Joachim & R. Loose

Wintersemester 2017/2018 | Abgabe: 15.12.17 um 10 Uhr

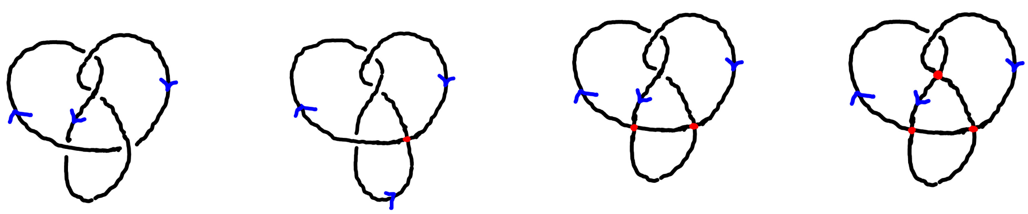
Aufgabe 24 (Conway-Polynom)**.** a) *Berechnen Sie die universelle Entwirrungsinvariante* $\Gamma(V)$ *der Verschlingung aus Abbildung 1a.*

b) *Berechnen Sie den 2-ten Koeffizienten des Conway-Polynoms der singulären Verschlingungen*

i) V_0 *aus Abbildung* 1b;

ii) V_1 *aus Abbildung* 1c;

iii) V_2 *aus Abbildung* 1d.



(a) Verschlingung V; (b) Verschlingung V_0; (c) Singuläre Verschlingung V_1; (d) Singuläre Verschlingung V_2;

Bemerkung. Für das vollständige Lösen der Aufgabenteile a) und b)i) gibt es die volle Punktzahl von 4 Punkten. Für das Bearbeiten der Aufgabenteile b)ii) und b)iii) können bis zu 4 Bonuspunkte vergeben werden.

Aufgabe 25 (Offene Teilmengen des $\mathbb{R}^n$)**.** Seien $n \in \mathbb{N}$ und $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. *Zeigen Sie, dass* U *lokal homöomorph zu* $\mathbb{R}^n$ *ist.*

Aufgabe 26 (Quotiententopologie und der Einheitskreis)**.** Sei $X = [0, \pi] \cup [3\pi, 4\pi] \subseteq \mathbb{R}$ und $R \subseteq X \times X$ die folgende Äquivalenzrelation

$$R = \{(x, x) | x \in X\} \cup \{(0, 4\pi), (\pi, 3\pi), (4\pi, 0), (3\pi, \pi)\} \subseteq X \times X.$$

Zeigen Sie, dass X/R *homöomorph zu* $\mathbb{S}^1$ *ist.*

Definition. a) Ein topologischer Raum X heißt *Hausdorff-Raum* oder *ein hausdorffscher Raum*, wenn es zu je zwei Punkten $x, y \in X, x \neq y$ Umgebungen U_x von x und U_y von y gibt mit $U_x \cap U_y = \emptyset$.

b) Ein topologischer Raum X *erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom*, wenn X eine abzählbare Basis der Topologie besitzt.

Bonusaufgabe. Seien X, Y topologische Räume und $\iota : X \longrightarrow Y$ eine Einbettung von X in Y.

a) *Zeigen Sie, dass X ein Hausdorffraum ist, falls Y ein Hausdorffraum ist.*

b) *Zeigen Sie, dass X das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, wenn Y das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt.*

Denkanstoß. Für $n \in \mathbb{N}$ ist der $\mathbb{R}^n$ ein Hausdorff-Raum und erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom.

a) Für je zwei Punkte $x, y \in \mathbb{R}^n, x \neq y$ mit $d := d(x, y)$ sind die offenen Bälle $U_x := B_{\frac{d}{2}}(x), U_y = B_{\frac{d}{2}(y)}$ Umgebungen von x bzw. y, für die gilt $U_x \cap U_y = \emptyset$.

b) Für die Standardtopologie auf dem $\mathbb{R}^n$ ist die Menge der offenen Bälle

$$\mathcal{B} = \{B_{\frac{1}{n}}(q) | n \in \mathbb{N}_{\geq 1}, q \in \mathbb{Q}^n\}$$

um Punkte in $\mathbb{Q}^n$ mit Radius $\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ eine abzählbare Basis.

Eine Fläche X wird in der Literatur als Hausdorff-Raum definiert, der lokal homöomorph zu $\mathbb{R}^2$ ist und das 2. Abzählbarkeitsaxiom erfüllt. Jetzt kann man sich überlegen, dass sich eine Fläche X nach dieser Definition in den $\mathbb{R}^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$ einbetten lässt. Benutzt man jetzt obige Bemerkung zusammen mit der Bonusaufgabe, sieht man, dass obige Definition einer Fläche äquivalent zur Definition aus der Vorlesung ist.