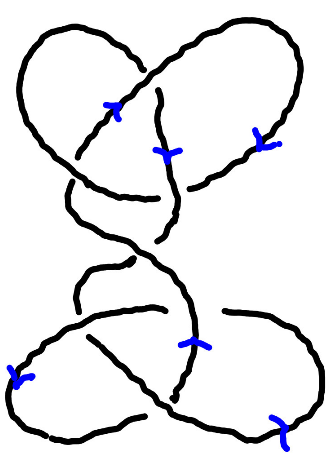
Aufgaben zur Vorlesung
Elemente der Topologie

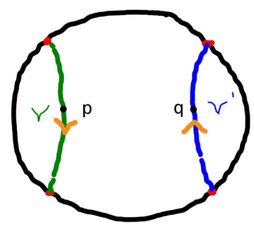
Blatt 8 — M. Joachim & R. Loose

Wintersemester 2017/2018 — Abgabe: 8.12.17 um 10 Uhr

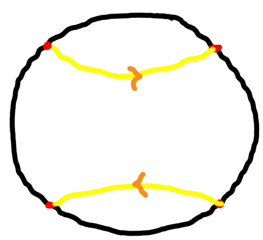
Aufgabe 21 (Berechnung des Jones-Polynoms)**.** *Berechnen Sie das Jones-Polynom $J_V(A)$, wobei V der orientierte Knoten aus Abbildung 1a ist.*



(a) Knotendiagramm des orientierten Knotens V zur Berechnung des Jones-Polynoms.



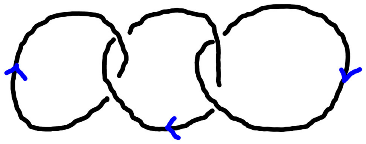
(b) Verschlingungen V und V' in D;



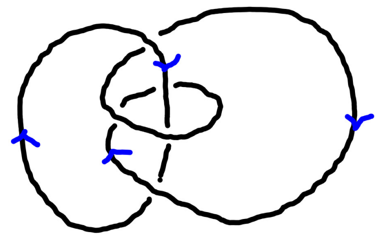
(c) Ersetzung der Bögen aus V und V' zu einer neuen Kreisscheibe D';

Definition. a) Sind $V = (K_1, K_2, \dots, K_r)$, $V' = (K'_1, K'_2, \dots, K'_{r'})$ zwei glatte Verschlingungen mit regulären Projektionen, deren Bilder im $\mathbb{R}^2$ sich nicht schneiden, so definieren wir die *disjunkte Vereinigung $V \coprod V'$ von V und V'* als Verschlingung $V \coprod V' = (K_1, K_2, \dots, K_r, K'_1, K'_2, \dots, K'_{r'})$.

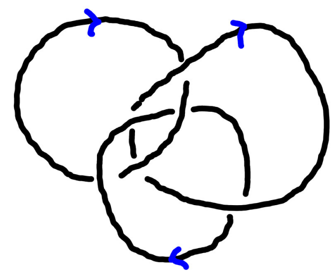
b) Seien V und V' zwei glatte orientierte Verschlingungen mit regulären Projektionen, deren Bilder im $\mathbb{R}^2$ sich nicht schneiden. Seien V und V' so, dass es eine eingebettete Kreisscheibe $D \subseteq \mathbb{R}^2$ gibt, sodass die Verschlingungsdiagramme in D wie in Abbildung 1b aussehen. Wir definieren die *zusammenhängende Summe von V und V' verknüpft an den Punkten p und q* als diejenige Verschlingung, die aus $V \coprod V'$ hervorgeht, indem wir $V \coprod V'$ außerhalb von D unverändert lassen und die Verschlingung in D durch D' wie in Abbildung 1c ersetzen. Wir schreiben abkürzend $V \# V'$.



(a) Verschlingung V_1 dreier Knoten;



(b) Verschlingung V_2 zweier Knoten;



(c) Verschlingung V_3 dreier Knoten;

Aufgabe 22 (Bracket- und Jones-Polynom der disjunkten Vereinigung und zusammenhängenden Summe)**.** Seien V und V' glatt orientierte Verschlingungen mit regulären Projektionen, deren Bild im $\mathbb{R}^2$ sich nicht schneiden.

a) *Zeigen Sie, dass für das Bracket-Polynom* $\langle V \coprod V' \rangle = \langle V \rangle \langle V' \rangle d$ *gilt.*

b) Seien V und V' so wie in 2 beschrieben und sei $V \# V'$ die zusammenhängende Summe. *Zeigen Sie, dass für das Bracket-Polynom* $\langle V \# V' \rangle = \langle V \rangle \langle V' \rangle$ *gilt.*

c) *Zeigen Sie, dass entsprechende Aussagen auch für das Jones-Polynom gelten.*

Aufgabe 23 (Universelle Entwirrungsinvariante)**.** *Berechnen Sie die universelle Entwirrungsinvariante* $\Gamma(V_1), \Gamma(V_2), \Gamma(V_3)$ *der Verschlingungen in Abbildungen 2a, 2b und 2c.*

Definition (Torusknoten)**.** Seien $p, q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ganze Zahlen mit $ggT(p,q) = 1$. Wir definieren den (p,q)-*Torusknoten* $\iota_{(p,q)}$ als

$$\begin{aligned} \iota_{(p,q)} &: \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^3; \\ (cos(\varphi), sin(\varphi)) &\longmapsto (r\cos(p\varphi), r\sin(p\varphi), -\sin(q\varphi)); \qquad r := (2+\cos(q\varphi)). \end{aligned}$$

Die Projektionen einiger Torusknoten sind in Abbildung 3 zu sehen.

Nikolausaufgabe (Färbbarkeit eines Torusknoten)**.** *Zeigen Sie, dass das Knotendiagramm der regulären Projektion des* $(3,-8)$-*Torusknoten färbbar ist.*

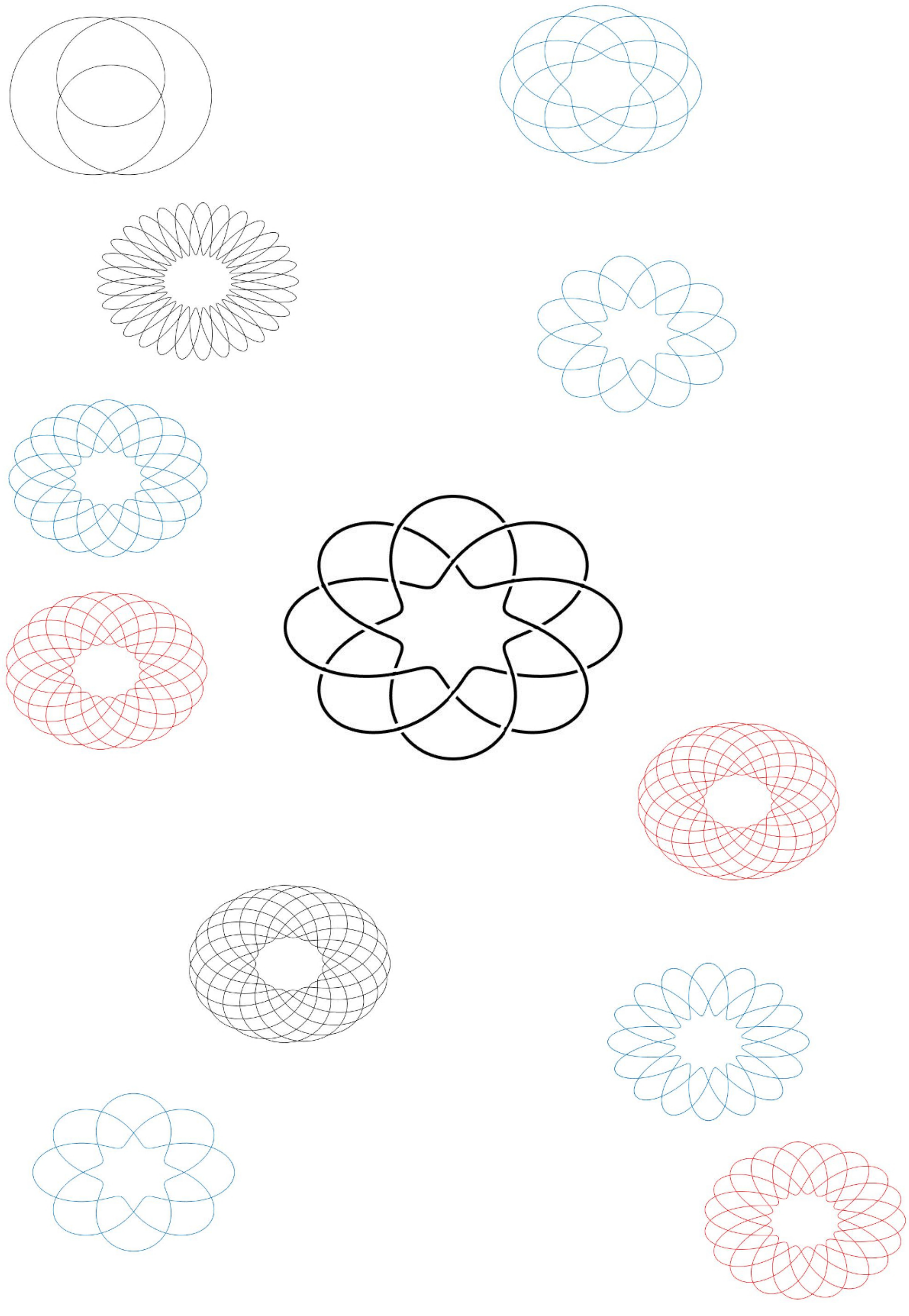


Abbildung 3: Knotenprojektionen einiger Torusknoten.