Aufgaben zur Vorlesung

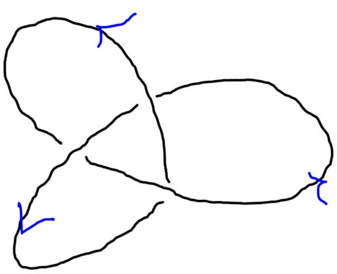
Elemente der Topologie

Blatt 7 M. Joachim & R. Loose

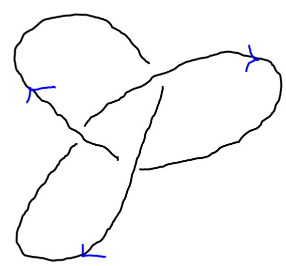
Wintersemester 2017/2018 Abgabe: 1.12.17 um 10 Uhr

Aufgabe 18 (Bracket- und Jones-Polynome der Kleeblattknoten)**.** a) *Berechnen Sie das Bracket- und das Jones-Polynom des linksdrehenden Kleeblattknotens, siehe Abbildung 1a.*

b) *Berechnen Sie das Bracket- und das Jones-Polynom des rechtsdrehenden Kleeblattknotens, siehe Abbildung 1b.*

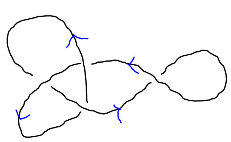


(a) Linksdrehender Kleeblattknoten

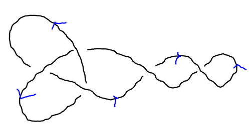


(b) Rechtsdrehender Kleeblattknoten

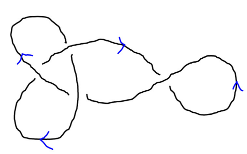
Aufgabe 19 (Weitere Bracket- und Jones-Polynome)**.** *Berechnen Sie das Bracket- und das Jones-Polynom der Knotendiagramme der Knoten $\iota_a, \iota_b, \iota_c, \iota_d$ in Abbildungen 2a, 2b, 2c, 2d.*



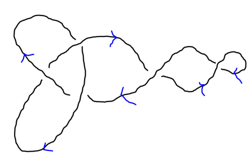
(a) $\iota_a : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^3$;



(b) $\iota_b : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^3$;



(c) $\iota_c : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^3$;



(d) $\iota_d : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^3$;

Definition. Sei V eine orientierte Verschlingung.

a) Wir definieren $\overline{V}$ als diejenige orientierte Verschlingung, die aus V hervorgeht, indem man in jeder Komponente von V die Orientierung umkehrt. Das heißt, ist $V = \coprod_{i=1}^{r} K_i$ für orientierte Knoten K_i für alle $i = 1, \ldots, r$ und $r \in \mathbb{N}$, dann ist $\overline{V} =$

$\coprod_{i=1}^{r} \overline{K_i}$. $\overline{K_i}$ ist der bereits in der Vorlesung defininierte orientierte Knoten, der aus K_i hervorgeht, indem man die Orientierung umkehrt.

b) Wir definieren $V^{\times}$ als diejenige orientierte Verschlingung, die aus V hervorgeht, indem man aus jeder Überkreuzung in V eine Unterkreuzung macht.

Aufgabe 20 (Eigenschaften des Jones-Polynoms)**.** Sei V eine orientierte Verschlingung.

a) *Zeigen Sie, dass für das Jones-Polynom* $J_{\overline{V}}(A) = J_V(A)$ *gilt.*

b) *Zeigen Sie, dass für das Jones-Polynom* $J_{V^{\times}}(A) = J_V(A^{-1})$ *gilt.*

Bonusaufgabe (Jones-Polynom eines Knotens mit exzessiv vielen Überkreuzungen)**.** *Bestimmen Sie das Jones-Polynom des Knotendiagramms aus Abbildung 3.*

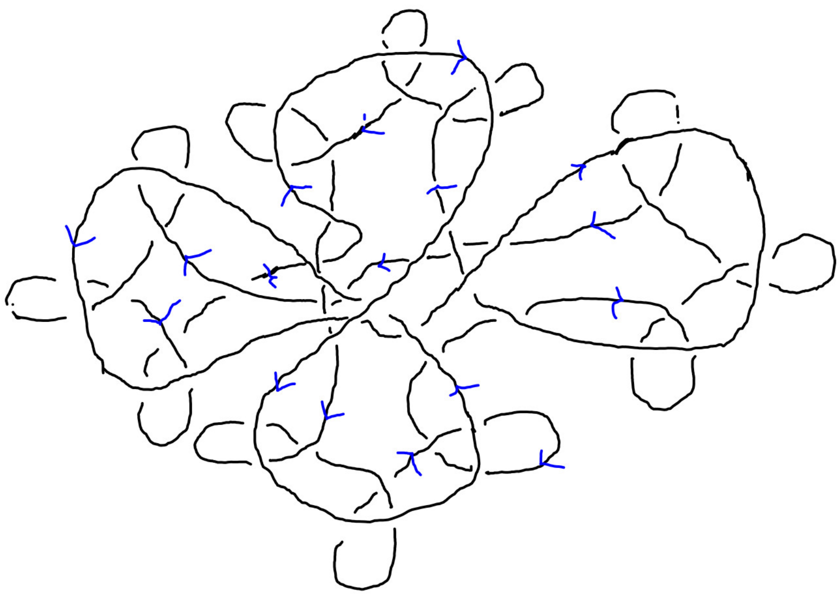


Abbildung 3: Knotendiagramm eines Knotens $\iota : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ zur Bestimmung des Jones-Polynoms.

Tipp. Bevor Sie anfangen das Bracket-Polynom des Knotendiagramms aus Abbildung 3 zu bestimmen, zählen Sie die Anzahl der Überkreuzungen. Wenn Sie damit fertig sind, erinnern Sie sich daran, dass das Bracket-Polynom eines Knotendiagramms mit n Überkreuzungen 2^n Summanden hat. Wenn Sie dies verdaut haben, machen Sie sich einen Tee oder ein sonstiges leckeres Getränk Ihrer Wahl. Überlegen Sie dann, ob Ihnen der Knoten aus Abbildung 3 vielleicht nicht doch bekannt vorkommt.