Aufgaben zur Vorlesung

**Elemente der Topologie**

**Blatt 5** M. Joachim & R. Loose

Wintersemester 2017/2018 Abgabe: 17.11.17 um 10 Uhr

---

**Aufgabe 12** (Polygonale Knoten). *Geben Sie ein Beispiel für einen polygonalen Knoten $\iota : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ und fertigen Sie davon eine Skizze an.*

**Definition** (Reguläre Kurve). Seien $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ und $c : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine stetige Abbildung. Wir nennen $c$ eine *reguläre Kurve*, wenn es $U \subseteq \mathbb{R}$ offen gibt mit $[a, b] \subseteq U$ und eine stetig differenzierbare Abbildung $\tilde{c} : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\tilde{c}|_{[a,b]} = c$ und $\tilde{c}'(t) \neq 0$ für alle $t \in [a, b]$.

**Definition** (Stückweise glatter Knoten). Eine Einbettung $\iota : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ nennen wir einen *stückweise glatten Knoten*, wenn es eine natürliche Zahl $n$ und reelle Zahlen $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = 2\pi$ gibt, so dass die Kompositionen

$$c_k = \iota \circ e : [t_k, t_{k+1}] \longrightarrow \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^3; t \longmapsto (cos(t), sin(t)) \longmapsto \iota((cos(t), sin(t)))$$

für alle $k = 0, \ldots, n-1$ reguläre Kurven sind.

**Aufgabe 13** (Stückweise glatte Knoten). a) *Zeigen oder widerlegen Sie:*

$$\iota_1 : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^3; \quad (cos(\pi t), sin(\pi t)) \longmapsto \begin{cases} (cos(3\pi t), sin(3\pi t), t), & t \in [0,1]; \\ (-1, \frac{1}{2}sin(2\pi t), \frac{1}{2} + \frac{1}{2}cos(2\pi t)), & t \in [1, \frac{3}{2}]; \\ (cos(2\pi t), 0, sin(2\pi t)), & t \in [\frac{3}{2}, 2]; \end{cases}$$

*ist ein stückweise glatter Knoten.*

b) *Zeigen oder widerlegen Sie:*

$$\iota_2 : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^3; \quad (cos(\pi t), sin(\pi t)) \longmapsto \begin{cases} (cos(3\pi t^2), sin(3\pi t^2), t^2), & t \in [0,1]; \\ (-1, \frac{1}{2}sin(2\pi t), \frac{1}{2} + \frac{1}{2}cos(2\pi t)), & t \in [1, \frac{3}{2}]; \\ (cos(2\pi t), 0, sin(2\pi t)), & t \in [\frac{3}{2}, 2]; \end{cases}$$

*ist ein stückweise glatter Knoten.*

**Aufgabe 14** (Ambiente Isotopie in der Scheibe). Seien $\{*\}$ der Einpunktraum und $\iota_0, \iota_1 : \{*\} \longrightarrow \mathbb{D}^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 | \|x\|_2 \leq 1\}$ Abbildungen mit $\iota_0(*) = 0$, $\iota_1(*) \in \mathring{\mathbb{D}}^2 = \{x \in \mathbb{D}^2 | \|x\|_2 <$

$1\}$. In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass $\iota_0, \iota_1$ ambient isotop sind via einer Isotopie $H : \mathbb{D}^2 \times I \longrightarrow \mathbb{D}^2$ des Raumes $\mathbb{D}^2$, die den Rand festhält. Das heißt, für $x \in \mathbb{S}^1, t \in [0,1]$ gilt $H_t(x) = x$.

a) *Fertigen Sie eine Skizze an und entwickeln Sie eine geometrische Beschreibung, wie solch eine oben beschriebene Isotopie $H$ des Raumes $\mathbb{D}^2$ aussehen könnte.*

b) *Argumentieren Sie jetzt formal, indem Sie eine Abbildung $H : \mathbb{D}^2 \times I \longrightarrow \mathbb{D}^2$ angeben und die oben genannten Eigenschaften nachweisen.*

**Bonusaufgabe** (Ambiente Isotopie von Knoten)**.** Seien $\mathbb{VT} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2$ *der Volltorus* und

$$\begin{aligned} \iota_1 : \mathbb{S}^1 &\longrightarrow \mathbb{VT}; \\ z &\longmapsto (z, \varphi_1(z)); \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \iota_2 : \mathbb{S}^1 &\longrightarrow \mathbb{VT}; \\ z &\longmapsto (z, \varphi_2(z)); \end{aligned}$$

mit $\varphi_i : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{D}^2$ stetig und $Bild(\varphi_i) \subseteq \mathring{\mathbb{D}}^2 = \{x \in \mathbb{D}^2 | \|x\|_2 < 1\}$ für $i = 1, 2$.

a) *Zeigen Sie mithilfe von Aufgabe 14, dass $\iota_1, \iota_2 : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{VT}$ ambient isotop zueinander sind.*

b) Sei $\iota : \mathbb{VT} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine Einbettung. *Zeigen Sie, dass $\iota \circ \iota_1, \iota \circ \iota_2$ ambient isotop zueinander sind.*