Aufgaben zur Vorlesung

Elemente der Topologie

Blatt 4 M. Joachim & R. Loose

Wintersemester 2017/2018 Abgabe: 10.11.17 um 10 Uhr

Aufgabe 9 (Abbildungsgrad)**.** Für $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ sei $g_n : I = [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$g_n(x) := \begin{cases} n(2n+1)^n(x - \frac{2i}{2n+1})^n, & x \in [\frac{2i}{2n+1}, \frac{2i+1}{2n+1}], i \in \{0, \ldots, n\}; \\ (-1)^i n \cdot cos(\frac{\pi(2n+1)^2}{2}(x - \frac{1}{2n+1})), & x \in [\frac{2i+1}{2n+1}, \frac{2i+2}{2n+1}], i \in \{0, \ldots, n-1\}. \end{cases}$$

Überlegen Sie sich zunächst, dass die Abbildungen g_n stetig sind für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Bestimmen Sei den Abbildungsgrad der Abbildung

$$f_n' : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1, \quad (cos(2\pi t), sin(2\pi t)) \longmapsto (cos(2\pi g_n(t)), sin(2\pi g_n(t))) \quad \textit{für } t \in [0,1];$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 10 (Isotopien)**.**

a) *Zeigen Sie, dass der Einheitskreis $\mathbb{S}^1$ homotopieäquivalent zur Euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ohne den Ursprung ist, das heißt, dass $\mathbb{S}^1 \simeq \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ für $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{R}^2 | \|z\|_2 = 1\}$ gilt.*

b) Wir definieren $\iota_1, \iota_2 : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \iota_1(x,y) = (x,y), \iota_2(x,y) = (x,-y)$. *Zeigen Sie, dass ι_1 und ι_2 nicht isotop zueinander sind.*

   Tipp. Benutzen Sie den ersten Aufgabenteil und die Homotopieinvarianz des Abbildungsgrades von Abbildungen $f : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$.

c) Wir definieren $j_1, j_2 : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, j_1(x,y) = (x,y,0), j_2(x,y) = (x,-y,0)$. *Zeigen Sie, dass j_1 und j_2 isotop zueinander sind.*

Definition.

a) Sei X ein topologischer Raum und $x, y \in X$ Punkte in X. *Ein Weg $w : x \rightsquigarrow y$ von x nach y in X* ist eine stetige Abbildung $w : I = [0,1] \longrightarrow X$ mit $w(0) = x, w(1) = y$.

b) Ein topologischer Raum X heißt *wegzusammenhängend*, wenn es für je zwei Punkte $x, y \in X$ einen Weg $w : x \rightsquigarrow y$ von x nach y in X gibt.

Aufgabe 11 (Kontraktibilität und *Wegzusammenhang*)**.** Sei X ein kontraktibler Raum. *Zeigen Sie, dass X wegzusammenhängend ist.*

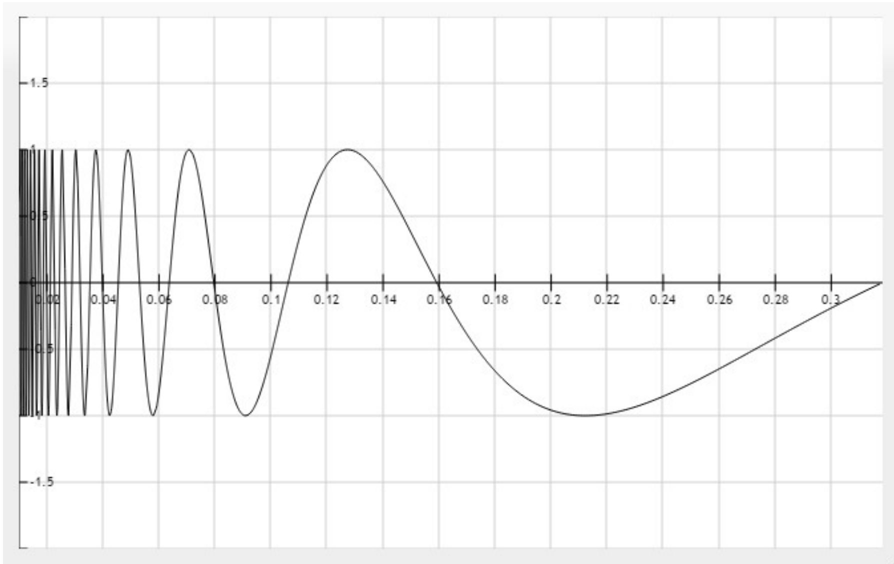

Abbildung 1: Bild des Raumes $T \subseteq \mathbb{R}^2$, gefunden auf `https://collegemathteaching.wordpress.com/`;

Bonusaufgabe (Kontraktibilität und die topologische Sinuskurve)**.** Seien

$$J := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x = 0, -1 \leq y \leq 1\},$$
$$S := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 < x \leq \frac{1}{\pi}, y = sin\left(\frac{1}{x}\right)\}$$

und $T := J \cup S \subseteq \mathbb{R}^2$ versehen mit der Teilraumtopologie. $T \subseteq \mathbb{R}^2$ wird in Abbildung 1 visualisiert und die *topologische Sinuskurve genannt*. Wir möchten in dieser Aufgabe einsehen, dass T nicht wegzusammenhängend und nach Aufgabe 11 damit nicht kontraktibel ist. Genauer gesagt, gibt es für $x \in S$ und $y \in J$ keinen Weg $w : x \rightsquigarrow y$ in T.
Wir nehmen an, für $x \in S$ und $y \in J$ gäbe es so einen Weg $w : x \rightsquigarrow y$. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass $Bild(w) \cap J = \{y\}$ gilt. Sei

$$pr_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad (x_1, x_2) \longmapsto x_2;$$

die Projektion auf die zweite Koordinate. Man kann zeigen, dass

$$pr_2(w(B_\delta(1))) = [-1, 1] \qquad \text{für alle } \delta > 0 \tag{1}$$

gilt. *Nutzen Sie Gleichung* (1) *um zu zeigen, dass* w *nicht stetig ist und führen Sie damit die Annahme der Existenz eines Weges* $w : x \rightsquigarrow y$ *zum Widerspruch.*