Aufgaben zur Vorlesung

Elemente der Topologie

Blatt 3 M. Joachim & R. Loose

Wintersemester 2017/2018 Abgabe: 3.11.17 um 10 Uhr

Aufgabe 7 (Produkttopologie auf $\mathbb{R}^n$)**.** Seien $n \in \mathbb{N}$ und $(\mathbb{R}^n, \mathcal{O}_{st})$ der $\mathbb{R}^n$ mit der *Standard Topologie* $\mathcal{O}_{st}$. Das heißt, $\mathcal{O}_{st}$ ist die von der *euklidischen Metrik* induzierte Topologie: es gilt $U \in \mathcal{O}_{st}$ genau dann, wenn $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen bezüglich der euklidischen Metrik ist. Insbesondere sei $\mathbb{R}$ mit der Standard Topologie versehen. Schreiben wir $\underline{n} = \{1, \ldots, n\}$ und $\mathbb{R}^n = \prod_{i \in \underline{n}} \mathbb{R}$ können wir $\mathbb{R}^n$ mit der Produkttopologie $\mathcal{O}_{prod}$ bezüglich der Topologien auf den einzelnen Faktoren versehen. *Zeigen Sie, dass* $(\mathbb{R}^n, \mathcal{O}_{st})$ *und* $(\mathbb{R}^n = \prod_{i \in \underline{n}} \mathbb{R}, \mathcal{O}_{prod})$ *als topologische Räume übereinstimmen.*

Aufgabe 8 (Homotopie)**.**

a) Seien X, Y, Z topologische Räume, $f, f_1, f_2 : X \longrightarrow Y$ und $g, g_1, g_2 : Y \longrightarrow Z$ stetige Abbildungen.

   i) *Zeigen Sie, dass* $g \circ f_1$ *homotop zu* $g \circ f_2$ *ist, falls* f_1 *homotop zu* f_2 *ist.*

   ii) *Zeigen Sie, dass* $g_1 \circ f$ *homotop zu* $g_2 \circ f$ *ist, falls* g_1 *homotop zu* g_2 *ist.*

b) Seien X ein topologischer Raum und $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow X, g : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ stetige Abbildungen. *Zeigen Sie, dass* f *und* g *nullhomotop sind.*

Bonusaufgabe (Produkttopologie und Abschluss)**.** Seien I eine Indexmenge, X_i topologische Räume für alle $i \in I$ und $A_i \subseteq X_i$ für alle $i \in I$. Wir statten $\prod_{i \in I} X_i$ mit der Produkttopologie aus und betrachten $\prod_{i \in I} A_i \subseteq \prod_{i \in I} X_i$. *Zeigen Sie, dass*

$$\overline{\prod_{i \in I} A_i} = \prod_{i \in I} \overline{A_i} \subseteq \prod_{i \in I} X_i$$

gilt. Das heißt, der Abschluss von $\prod_{i \in I} A_i$ in $\prod_{i \in I} X_i$ stimmt mit dem Produkt der Abschlüsse der A_i in X_i überein.