Aufgaben zur Vorlesung

Elemente der Topologie

Blatt 2 M. Joachim / R. Loose

Wintersemester 2017/2018 Abgabe: 27.10.17 um 10 Uhr

Aufgabe 4. Sei X die Menge der Farben eines Skatspiel, d.h., $X = \{\diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit, \clubsuit\}$. *Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen.*

a) $\mathcal{M} = \{\{\diamondsuit\}, \{\diamondsuit, \spadesuit, \clubsuit\}, \emptyset, \{\spadesuit, \clubsuit\}, \{\diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit, \clubsuit\}\}$ ist eine Topologie auf X.

b) $\mathcal{N} = \{\{\spadesuit\}, \{\spadesuit, \clubsuit\}, \{\heartsuit, \spadesuit\}, \emptyset, \{\diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit, \clubsuit\}, \{\heartsuit, \spadesuit, \clubsuit\}, \{\heartsuit\}, \{\heartsuit, \clubsuit\}\}$ ist eine Topologie auf X.

Aufgabe 5. Sei $X = \{\diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit, \clubsuit\}$ wie in Augabe 4.

a) Sei $\mathcal{S} = \{\{\diamondsuit, \heartsuit\}, \{\heartsuit, \spadesuit\}\}$. *Bestimmen Sie die Topologie $\mathcal{O}$ auf X, die von $\mathcal{S}$ als Subbasis erzeugt wird.* Gehen Sie dazu so vor wie in der Vorlesung beschrieben. (Vergleiche Vorlesungsnotizen Kapitel 2, Bemerkung auf Seite 9.)

b) Sei $\mathcal{O}$ die Topologie auf X aus Augabenteil a). *Bestimmen Sie die Menge der Umgebungen $\mathcal{V}(\diamondsuit)$ von $\diamondsuit$.*

Aufgabe 6. Seien $(X, d), (X', d')$ metrische Räume, $\mathcal{O}$ die zugrundeliegende Topologie von (X, d), d.h., $\mathcal{O} = \{U \subseteq X | U \text{ ist offen im metrischen Sinne}\}$ und $\mathcal{O}'$ die zugrundeliegende Topologie von (X', d'). (Vergleiche Vorlesungsnotizen Kapitel 1, Seite 3.) Außerdem sei $f : X \longrightarrow X'$ eine Abbildung. *Beweisen Sie die Äquivalenz der beiden folgenden Aussagen.*

a) f ist stetig im metrischen Sinne. (Vergleiche Kapitel 1 der Vorlesung.)

b) f ist stetig im topologischen Sinne. (Vergleiche Kapitel 2 der Vorlesung.)

Bonusaufgabe.

a) Seien X eine Menge und $\mathcal{A}$ eine Menge von Teilmengen von X mit den folgenden Eigenschaften:

   i) für eine Familie $\{A_i\}_{i \in I}$, mit $A_i \in \mathcal{A}$ für alle $i \in I$, ist $\bigcap_{i \in I} A_i \in \mathcal{A}$;

   ii) für $n \in \mathbb{N}$ und $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ ist $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$;

iii) $X, \emptyset \in \mathcal{A}$.

Wir definieren $\mathcal{O} := \{U \subseteq X | U = X \setminus A \text{ für ein } A \in \mathcal{A}\}$. *Zeigen Sie, dass $\mathcal{O}$ eine Topologie auf X ist.*

b) Für $X = \mathbb{C}$ definieren wir $\mathcal{A}_Z := \{A \subseteq \mathbb{C} | A = p^{-1}(0) \text{ für ein } p \in \mathbb{C}[T]\}$. *Weisen Sie Eigenschaften i),ii),iii) aus Aufgabenteil a) für $\mathcal{A}_Z$ nach. Folgern Sie, dass $\mathcal{O}_Z = \{U \subseteq X | U = X \setminus A$ für ein $A \in \mathcal{A}_Z\}$ eine Topologie auf $\mathbb{C}$ ist.* $\mathcal{O}_Z$ ist die sogenannte *Zariski-Topologie.*

Bemerkung. Obige Definition lässt sich leicht auf algebraisch abgeschlossene Körper k und höhere Dimensionen $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ übertragen. Wir ersetzen die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ durch $X = k^n$ und den Polynomring in einer Variablen durch den Polynomring $k[T_1, \ldots, T_n]$ in n Variablen.