Aufgaben zur Vorlesung

Elemente der Topologie

Blatt 11 M. Joachim & R. Loose

Wintersemester 2017/2018 Abgabe: 12.1.18 um 10 Uhr

Aufgabe 30 (2-Sphäre und 2-Torus). a) Betrachten Sie die 2-Sphäre

$$\mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 | \|x\|_2 = 1\}$$

und den Nordpol $N = (0, 0, 1) \in \mathbb{S}^2$. *Zeigen Sie, dass* $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ *kontraktibel ist.*

b) Betrachten Sie den 2-Torus $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ und einen Punkt $x \in \mathbb{T}^2$. *Definieren Sie stetige Abbildungen* $f : \mathbb{T}^2 \setminus \{x\} \longrightarrow \mathbb{S}^1$ *und* $g : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{T}^2 \setminus \{x\}$ *mit* $fg = id_{\mathbb{S}^1}$.

c) *Benutzen Sie die Homotopieinvarianz des Abbildungsgrades von stetigen Abbildungen* $f' : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ *um zu zeigen, dass* $\mathbb{T}^2 \setminus \{x\}$ *nicht kontraktibel ist.*

d) *Benutzen Sie die vorigen Aufgabenteile um zu zeigen, dass die* 2*-Sphäre* $\mathbb{S}^2$ *nicht homöomorph zum* 2*-Torus* $\mathbb{T}^2$ *ist.*

Aufgabe 31 (Zusammenhängende Summe mit der 2-Sphäre). a) *Zeigen Sie, dass die obere Hemisphäre* $D^2_+ = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{S}^2 | x_3 \geq 0\} \subseteq \mathbb{S}^2$ *und die untere Hemisphäre* $D^2_- = \{y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{S}^2 | y_3 \leq 0\} \subseteq \mathbb{S}^2$ *jeweils homöomorph zur Scheibe* $\mathbb{D}^2 = \{z \in \mathbb{R}^2 | \|z\|_2 \leq 1\}$ *sind.*

b) *Zeigen Sie, dass* $\mathbb{S}^1 \times I$ *mit* $\mathbb{S}^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 | \|x\|_2 = 1\}, I = [0, 1]$ *homöomorph zu* $\mathbb{D}^2 \setminus B_{\frac{1}{2}}(0) = \{y \in \mathbb{R}^2 | \frac{1}{2} \leq \|y\|_2 \leq 1\}$ *ist.*

c) Sei $X = (\mathbb{S}^1 \times I) \coprod \mathbb{D}^2$ und R die folgende Äquivalenzrelation auf X. $R \subseteq X \times X$ definieren wir als

$$\begin{aligned} R := & \{(x, y) \in X \times X | x = y\} \\ & \bigcup \{(x, y) \in X \times X | \exists z \in \mathbb{S}^1 \text{ mit } x = (z, 1) \in \mathbb{S}^1 \times I, y = z \in \mathbb{D}^2\} \\ & \bigcup \{(x, y) \in X \times X | \exists z \in \mathbb{S}^1 \text{ mit } x = z \in \mathbb{D}^2, y = (z, 1) \in \mathbb{S}^1 \times I\}. \end{aligned}$$

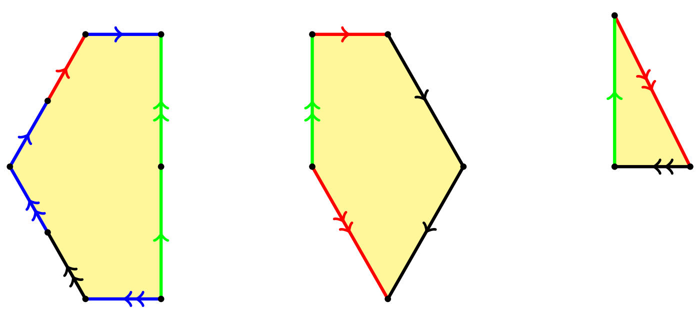
Betrachten Sie den Quotientenraum X/R versehen mit der Quotiententopologie. *Zeigen Sie, dass* X/R *homöomorph zu* $\mathbb{D}^2$ *ist.*

d) Seien F eine nicht-leere geschlossene Fläche, $x \in F$ ein Punkt und $U_x \subseteq F$ eine offene Umgebung von x mit einem Homöomorphismus $\varphi_x : U_x \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\varphi_x(x) = 0$. Betrachten Sie außerdem den Südpol $S = (0, 0, -1) \in \mathbb{S}^2$ zusammen mit der stereographischen Projektion $\varphi_S : \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$. Betrachten Sie entsprechend dieser Daten die zusammenhängende Summe $F \# \mathbb{S}^2$. *Zeigen Sie, dass* $F \# \mathbb{S}^2 \cong F$ *gilt.*

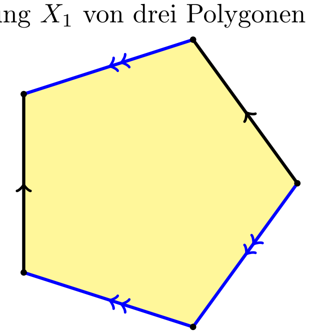
Tipp. Machen Sie sich Skizzen zu allen Teilaufgaben und versuchen Sie die gesuchten Homöomorphismen anschaulich zu finden. Formalisieren Sie dann Ihre Argumente.

Aufgabe 32 (Klebevorschrift 1)**.** Betrachten Sie die disjunkte Vereinigung X_1 der Polygone aus Abbildung 1a und die Äquivalenzrelation R_1, die durch die Markierung der Kanten definiert wird. *Zeigen oder widerlegen Sie:* Der Quotientenraum X_1/R_1 ist eine geschlossene Fläche. *Falls Sie zu dem Entschluss kommen, dass X_1/R_1 eine geschlossene Fläche ist, so geben Sie an zu welcher geschlossenen Fläche F_g beziehungsweise F_g' aus der Vorlesung X_1/R_1 homöomorph ist.*

Bonusaufgabe (Klebevorschrift 2)**.** Betrachten Sie das Polygon X_2 aus Abbildung 1b und die Äquivalenzrelation R_2, die durch die Markierung der Kanten definiert wird. *Zeigen oder widerlegen Sie:* Der Quotientenraum X_2/R_2 ist eine geschlossene Fläche.



(a) Disjunkte Vereinigung X_1 von drei Polygonen mit markierten Kanten;



(b) Polygon X_2 mit Markierung von Kanten;