Aufgaben zur Vorlesung

Elemente der Topologie

Blatt 10 M. Joachim & R. Loose

Wintersemester 2017/2018 Abgabe: 22.12.17 um 10 Uhr

Definition. a) Sei $Y_1 = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ und $R_1 \subseteq Y_1 \times Y_1$ die folgende Äquivalenzrelation

$$R_1 = \{(x,y) \in Y_1 \times Y_1 | x = y\} \bigcup \{(x,y) \in Y_1 \times Y_1 | \exists r \in \mathbb{R} \text{ mit } x = r \cdot y\}.$$

Wir definieren $X_1 := Y_1/R_1$ und versehen X_1 mit der Quotiententopologie.

b) Sei $Y_2 = \mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 | \|x\|_2 = 1\}$ und $R_2 \subseteq Y_2 \times Y_2$ die folgende Äquivalenzrelation

$$R_2 = \{(x,y) \in Y_2 \times Y_2 | x = y\} \bigcup \{(x,y) \in Y_2 \times Y_2 | x = -y\}.$$

Wir definieren $X_2 := Y_2/R_2$ und versehen X_2 mit der Quotiententopologie.

Aufgabe 27 (Zwei Definitionen der reell projektiven Ebene $\mathbb{R}P^2$)**.** *Zeigen Sie, dass X_1 homöomorph zu X_2 ist.* Wir nennen den Raum X_1 beziehungsweise X_2 nach dieser Identifizierung *die reell projektive Ebene und schreiben* $\mathbb{R}P^2$.

Tipp. Schreiben Sie sich zunächst Abbildungen $Y_1 \longrightarrow Y_2$ und $Y_2 \longrightarrow Y_1$ hin mithilfe derer Sie dann Abbildungen $X_1 \longrightarrow X_2$ und $X_2 \longrightarrow X_1$ definieren und zeigen, dass diese stetig und invers zueinander sind.

Denkanstoß. Den Raum $\mathbb{R}P^2$ kennen Sie schon aus der Vorlesung als unorientierte Fläche F_1'. Dies kann man einsehen, wenn man sich die Beschreibung von X_2 als Quotient von $Y_2 = \mathbb{S}^2$ hernimmt und die Quotientenbildung nur auf dem Teilraum der oberen Hemisphäre $D_+^2 = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{S}^2 | x_3 \geq 0\} \subseteq \mathbb{S}^2$ durchführt. Das heißt, wir können $F_1' = D_+^2 / R_2|_{D_+^2}$ schreiben, wobei $R_2|_{D_+^2}$ die auf D_+^2 eingeschränkte Äquivalenzrelation ist.

Aufgabe 28 (Flächeneigenschaften von $\mathbb{R}P^2$)**.** a) *Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}P^2$ mit der Beschreibung von X_1 beziehungsweise X_2 lokal homöomorph zu $\mathbb{R}^2$ ist.*

b) *Zeigen Sie, dass sich $\mathbb{R}P^2$ mit der Beschreibung von X_1 beziehungsweise X_2 in den $\mathbb{R}^N$ für ein $N \in \mathbb{N}$ einbetten lässt.*

Tipp. Einen Punkt $x = [(x_1,x_2,x_3)] \in \mathbb{R}P^2$ schreiben wir häufig in *homogenen Koordinaten* $x = [x_1 : x_2 : x_3]$. Überlegen Sie sich, dass zum Beispiel für den Punkt $x = [1:0:0] \in \mathbb{R}P^2$

die Teilmenge $U_x = \{[x_1 : x_2 : x_3] \in \mathbb{R}P^2 | x_1 \neq 0\} \subseteq \mathbb{R}P^2$ eine Umgebung von x ist. Überlegen Sie sich weiterhin, dass

$$\varphi_x : U_x \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad [x_1 : x_2 : x_3] \longmapsto (\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1});$$

eine wohldefinierte, stetige Abbildung ist. Diese gewonnene Erkenntnis könnte hilfreich für das Lösen der obigen Aufgabe oder zumindest von Aufgabenteilen sein.

Aufgabe 29 (Zusammenhängende Summe von Flächen)**.** Für $\tilde{g} \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ seien $F_{\tilde{g}}$ die *orientierte Fläche vom Geschlecht* $\tilde{g}$ und $F'_{\tilde{g}}$ die *unorientierte Fläche vom Geschlecht* $\tilde{g}$ aus der Vorlesung. Seien $g, g' \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.

a) *Zeigen Sie, dass* $F_g \# F_{g'} \cong F_{g+g'}$ *gilt.*

b) *Zeigen Sie, dass* $F'_g \# F'_{g'} \cong F'_{g+g'}$ *gilt.*

c) *Zeigen Sie, dass* $F_g \# F'_{g'} \cong F'_{2g+g'}$ *gilt.*

Bonusaufgabe (Verdopplung des Ursprungs im $\mathbb{R}^2$)**.** Wir definieren zwei Ebenen $E_1 := \mathbb{R}^2, E_2 := \mathbb{R}^2$ und betrachten die Einbettungen $\iota_i : E_i = \mathbb{R}^2 \longrightarrow E_1 \coprod E_2, \iota_i(x) = x \in E_i$ für $i = 1, 2$. Auf $X := E_1 \coprod E_2$ definieren wir die folgende Äquivalenzrelation $R \subseteq (E_1 \coprod E_2) \times (E_1 \coprod E_2)$

$$\begin{aligned} R := & \quad \{(x, y) \in X \times X | x = y\} \\ \bigcup & \quad \{(x, y) \in X \times X | \exists z \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \text{ mit } x = \iota_i(z), y = \iota_j(z) \text{ und } i, j \in \{1, 2\}\}. \end{aligned}$$

Wir definieren $E' := X/R$ und versehen E' mit der Quotiententopologie.

a) *Zeigen Sie, dass* E' *lokal homöomorph zu* $\mathbb{R}^2$ *ist.*

b) *Zeigen Sie, dass* E' *keine Fläche ist.*

   Tipp. Zeigen Sie, dass E' kein Hausdorffraum ist, indem Sie zwei Punkte finden, die sich nicht durch Umgebungen trennen lassen. Die Definition des *Hausdorff-Begriffes* finden Sie auf Blatt 9 über der Bonusaufgabe.