Aufgaben zur Vorlesung

# Elemente der Topologie

**Blatt 1** M. Joachim / R. Loose

Wintersemester 2017/2018 Abgabe: 20.10.17 um 10 Uhr

---

**Aufgabe 1.** Für die offene Einheitsscheibe $D := \{x \in \mathbb{R}^2 | \|x\| < 1\}$ definieren wir die folgende Abbildung

$$d_{hyp} : D \times D \longrightarrow \mathbb{R}_0^+;$$
$$(x, y) \longmapsto arcosh(1 + \delta(x, y)) \qquad \text{mit} \qquad \delta(x, y) = 2\frac{\|x - y\|^2}{(1 - \|x\|^2)(1 - \|y\|^2)};$$

wobei $\|\cdot\|$ die Euklidische Norm und $arcosh : [1, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ die Umkehrfunktion des Kosinus hyperbolicus sind. Das Paar $\mathbb{H}^2 := (D, d_{hyp})$ nennen wir *die hyperbolische Ebene*. *Zeigen Sie, dass $d_{hyp}$ eine Metrik ist.*

**Definition.** Seien $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$ metrische Räume und $f : X_1 \longrightarrow X_2$ eine Abbildung. Dann heißt $f$ *Isometrie*, wenn

a) $d_2(f(x), f(y)) = d_1(x, y)$ für alle $x, y \in X_1$ gilt;

b) $f$ bijektiv ist.

**Aufgabe 2.**

a) Seien $f : X_1 \longrightarrow X_2$ und $g : X_2 \longrightarrow X_3$ Isometrien zwischen metrischen Räumen $(X_i, d_i), i = 1, 2, 3$. *Zeigen Sie, dass die Komposition $g \circ f : X_1 \longrightarrow X_3$ eine Isometrie ist.*

b) Für $n \in \mathbb{N}$, einen Vektor $a \in \mathbb{R}^n$ und eine orthogonale Matrix $A \in O(n)$ seien die Abbildungen $\tau_a, \rho_A$ gegeben durch

$$\tau_a : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n; \qquad \rho_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n;$$
$$x \longmapsto x + a; \qquad x \longmapsto A \cdot x.$$

Wir statten $\mathbb{R}^n$ mit der Euklidischen Metrik aus. *Zeigen Sie, dass $\tau_a, \rho_A$ Isometrien sind.*

*Denkanstoß.* Sei $n \in \mathbb{N}$ und $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine Isometrie. Lässt sich $f$ dann schreiben als Komposition $f = \rho_A \circ \tau_a$ für geeignete $a \in \mathbb{R}^n, A \in O(n)$?

**Definition.** Seien $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$ metrische Räume, $X_1 \times X_2$ das kartesische Produkt. Wir definieren

$$d_{\max} : (X_1 \times X_2) \times (X_1 \times X_2) \longrightarrow \mathbb{R}_0^+; ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \longmapsto \max\{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\}.$$

**Aufgabe 3.**

a) *Zeigen Sie, dass* $(X_1 \times X_2, d_{\max})$ *ein metrischer Raum ist.* Wir nennen $d_{\max}$ *die Maximumsmetrik bezüglich der Metriken* $d_1, d_2$.

b) Für eine Menge $X$ sei $(F_b(X; \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ der normierte Vektorraum der beschränkten reellen Funktionen auf $X$ mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ aus der Vorlesung und $d_\infty^X$ die von der Norm induzierte Metrik auf $X$. Für zwei Mengen $Y, Z$ sei $Y \coprod Z$ die disjunkte Vereinigung. Wir definieren die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi : F_b(Y; \mathbb{R}) \times F_b(Z; \mathbb{R}) &\longrightarrow F_b(Y \coprod Z; \mathbb{R}); \\ (f_1, f_2) &\longmapsto f = \left[ x \longmapsto \begin{cases} f_1(x), & x \in Y; \\ f_2(x), & x \in Z; \end{cases} \right]. \end{aligned}$$

Außerdem statten wir $F_b(Y; \mathbb{R}) \times F_b(Z; \mathbb{R})$ mit der Maximumsmetrik bezüglich $d_\infty^Y, d_\infty^Z$ und $F_b(Y \coprod Z; \mathbb{R})$ mit der Metrik $d_\infty^{Y \coprod Z}$ aus.
*Zeigen Sie, dass* $\varphi$ *eine Isometrie ist.*

**Bonusaufgabe.**

**Definition.** Sei $p$ eine Primzahl. Die *$p$-adische Bewertung* $v_p(k)$ einer ganzen Zahl $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ist definiert als $v_p(k) := m$ für $k = q \cdot p^m$, wobei $p$ kein Teiler von $q$ ist. Außerdem sei $v_p(0) := \infty$. $v_p$ setzen wir auf $\mathbb{Q}$ fort, indem wir $v_p(\frac{k_1}{k_2}) := v_p(k_1) - v_p(k_2)$ setzen. Damit definieren wir den *$p$-adischen Absolutbetrag*

$$|\cdot|_p : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}_0^+; \qquad a \longmapsto p^{-v_p(a)}.$$

Die *$p$-adische Metrik auf* $\mathbb{Q}$ ist dann definiert als

$$d_p : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}_0^+; \qquad (a, b) \longmapsto |a - b|_p.$$

a) *Zeigen Sie, dass* $(\mathbb{Q}, d_p)$ *ein metrischer Raum ist.*

b) Sei jetzt $p = 2$ und für $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ sei $B_\epsilon(a) = \{b \in \mathbb{Q} | d_p(a, b) < \epsilon\}$ der $\epsilon$-Ball um $a \in \mathbb{Q}$ bezüglich der 2-adischen Metrik auf $\mathbb{Q}$. *Bestimmen Sie die Menge* $B_{\frac{1}{8}}(35) \cap \underline{100}$, wobei $\underline{100} = \{1, \ldots, 100\}$ die ganzen Zahlen von 1 bis 100 sind.