Grundlagen der Analysis, Topologie und Geometrie **Blatt 10**
A. Bartels, R. Zeidler SS17

Abgabetermin: 10.07.2017, 12:00

Aufgabe 1. Sei M eine wegzusammenhängende C^∞-Mannigfaltigkeit. Sei $\bar{M}$ ein topologischer Raum und $p\colon \hat{M} \to M$ eine Überlagerung. Zeigen Sie, dass ein C^∞-Atlas auf $\bar{M}$ existiert, sodass p eine glatte Abbildung wird mit $\operatorname{Rg}_{\bar{x}} p = \dim \bar{M} = \dim M$ für alle $\bar{x} \in \bar{M}$.

Aufgabe 2. Sei $p\colon \hat{X} \to X$ eine Überlagerung und $\hat{X}$ wegzusammenhängend. Sei $\hat{x}_0 \in \hat{X}$ und $x_0 = p(\hat{x}_0)$, $G := \pi_1(X, x_0)$ und $H := p_*(\pi_1(\hat{X}, \hat{x}_0))$. Beschreiben Sie die Gruppe der Decktransformationen $\Delta(p)$ mit Hilfe von G und H (siehe Aufgabe 3 von Blatt 9). Schließen Sie, dass $\Delta(p) \cong G$ falls $\hat{X}$ einfach zusammenhängend ist.

Bonusfrage: Für $\hat{X}$ einfach zusammenhängend wirkt sowohl $G = \pi_1(X, x_0)$ als auch $\Delta(p)$ (letzteres durch Einschränkung) auf $p^{-1}(x_0)$. Beschreiben und vergleichen Sie diese beiden Wirkungen unter Verwendung des Isomorphismus $\Delta(p) \cong G$ und der Bijektion $G \xrightarrow{\cong} p^{-1}(x_0)$, $g \mapsto g \cdot \hat{x}_0$.

Aufgabe 3. Sei $p\colon \hat{X} \to X$ eine Überlagerung und $\hat{X}$ wegzusammenhängend. Sei $x_0 \in X$. Zeigen Sie, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

(a) Für jede Schleife $\omega\colon [0,1] \to X$ bei x_0 gilt: Besitzt ω eine Hebung zu einer Schleife, so ist jede Hebung von ω eine Schleife.

(b) Für ein (jedes) $\hat{x} \in p^{-1}(x_0)$ ist $p_*(\pi_1(\hat{X}, \hat{x}))$ eine normale Untergruppe von $\pi_1(X, x_0)$.

(c) Die Decktransformationsgruppe $\Delta(p)$ wirkt transitiv auf $p^{-1}(x_0)$.

(d) Die Abbildung p induziert eine Homöomorphismus $\Delta(p)\backslash\hat{X} \cong X$.

Bemerkung: Eine Überlagerung, die diese Bedingungen erfüllt, heißt *normale* Überlagerung (alternativ auch *reguläre* oder *Galois*- Überlagerung).

Aufgabe 4. Sei $x \in \mathbb{R}^2$ und $R > 0$. Sei $S^1_R(x) = \{y \in \mathbb{R}^2 \mid \|x - y\| = R\}$ der Kreis um den Punkt x vom Radius R. Sei $H \subset \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$H = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S^1_{\frac{1}{n}}\left(\frac{1}{n}, 0\right) \subset \mathbb{R}^2$$

versehen mit der Unterraumtopologie. Der Raum H heisst auch *der Raum der Hawaiianischen Ohrringe* (siehe Abbildung 1 auf der nächsten Seite).

(i) Zeigen Sie, dass H nicht lokal einfach zusammenhängend ist.

(ii) Zeigen Sie, dass die Gruppe $\pi_1(H)$ surjektiv auf $\prod_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}$ abbildet. Insbesondere hat $\pi_1(H)$ damit überabzählbar viele Elemente.

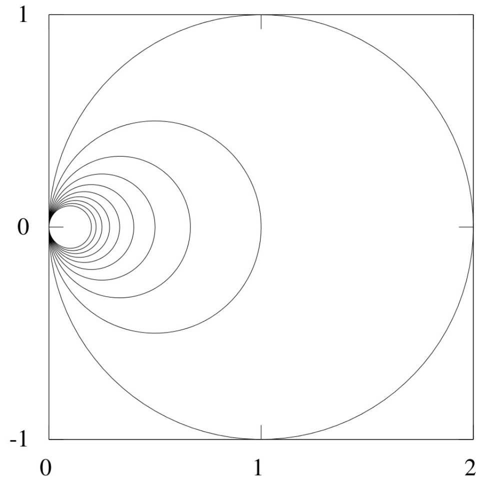

Abbildung 1: Hawaiianische Ohrringe