Grundlagen der Analysis, Topologie und Geometrie — Blatt 2

A. Bartels, R. Zeidler SS17

Abgabetermin: 08.05.2017, 12:00

Aufgabe 1. Seien X und Y topologische Räume. Beweisen Sie, dass eine Abbildung $f\colon X \to Y$ genau dann stetig ist, falls für jedes konvergente Netz $(x_i)_{i\in I}$ mit $x_i \to x$ in X gilt $f(x_i) \to f(x)$ in Y.

Aufgabe 2. Sei X eine Menge, $\mathcal{P}(X)$ die Potenzmenge von X und $C\colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ eine Abbildung mit den folgenden Eigenschaften:

(a) Für alle $A \subset X$ gilt $A \subset C(A)$,

(b) für $A \subset X$, $B \subset X$ gilt $C(A \cup B) = C(A) \cup C(B)$,

(c) für alle $A \subset X$ ist $C(C(A)) = C(A)$,

(d) es gilt $C(\emptyset) = \emptyset$.

Zeigen Sie, dass es eine Topologie $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(X)$ auf X gibt, so dass $C(A) = \overline{A}$ der Abschluss von A bezüglich dieser Topologie ist.

Bemerkung: Eine Abbildung C wie in der Aufgabe heißt auch *Kuratowski Abschluss Operation*.

Aufgabe 3. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussage:

Sei X ein topologischer Raum. Falls jede abzählbare Teilmenge von X abgeschlossen ist, dann ist die Topologie die diskrete Topologie.

Bonusfrage: Was gilt, wenn X ein Hausdorffraum ist?

Aufgabe 4. Beweisen Sie, dass jeder unendliche Hausdorffraum einen abzählbar unendlichen diskreten Unterraum enthält.

Bemerkung: Ein Unterraum A eines topologischen Raumes X heißt *diskret*, falls die Spurtopologie auf A die diskrete Topologie ist.