Grundlagen der Analysis, Topologie und Geometrie — Blatt 8

A. Bartels, R. Zeidler SS17

Abgabetermin: 26.06.2017, 12:00

Aufgabe 1. Seien X und Y topologische Räume und sei $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$. Wie lässt sich die Fundamentalgruppe $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$ durch $\pi_1(X, x_0)$ und $\pi_1(Y, y_0)$ ausdrücken? Beweisen Sie Ihre Behauptung!

Aufgabe 2. Sei X ein topologischer Raum. Sei $[S^1, X]$ die Menge der Homotopieklassen aller stetigen Abbildungen $S^1 \to X$. Jede Schleife $\omega\colon [0, 1] \to X$ bestimmt eine stetige Abbildung $f_\omega\colon S^1 \to X$ mit $f_\omega(e^{2\pi i t}) = \omega(t)$. Sei $x_0 \in X$ ein Basispunkt und $\Phi\colon \pi_1(X, x_0) \to [S^1, X]$ die Abbildung gegeben durch $\Phi([\omega]) = [f_\omega]$. Beweisen Sie, dass $\Phi([\omega]) = \Phi([\omega'])$ genau dann gilt, wenn $[\omega]$ und $[\omega']$ in $\pi_1(X, x_0)$ konjugiert zueinander sind[1].

Aufgabe 3. Sei $S^1 \vee S^1 = (S^1 \amalg S^1)/\sim$, wobei die Äquivalenzrelation die beiden Basispunkte zu einem Punkt $x_0 \in S^1 \vee S^1$ identifiziert, aber nichts anderes. Zeigen Sie, dass $\pi_1(S^1 \vee S^1, x_0)$ nicht abelsch ist.

Aufgabe 4. In dieser Aufgabe soll der Fundamentalsatz der Algebra mit Hilfe topologischer Methoden bewiesen werden: Sei $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ ein Polynom mit Koeffizienten $a_i \in \mathbb{C}$, das *keine* Nullstelle in $\mathbb{C}$ besitzt. Sei $\mathrm{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

(a) Beweisen Sie, dass die Abbildung $f\colon \mathrm{S}^1 \to \mathrm{S}^1$ gegeben durch $f(z) = \frac{p(z)}{|p(z)|}$ wohldefiniert und homotop zu einer konstanten Abbildung ist.

(b) Zeigen Sie dann, dass $f\colon \mathrm{S}^1 \to \mathrm{S}^1$ auch homotop zur Abbildung $g_n\colon \mathrm{S}^1 \to \mathrm{S}^1$ mit $g_n(z) = z^n$ ist.

In der Vorlesung haben wir gesehen, dass g_n für $n > 0$ *nicht* homotop zu einer konstanten Abbildung ist. Somit folgt aus Teil (b), dass f und damit auch p konstant sein müssen ($n = 0$) – die Aussage des Fundamentalsatzes der Algebra.

[1] Das heißt: Es gibt $g \in \pi_1(X, x_0)$, so dass $g \cdot [\omega] \cdot g^{-1} = [\omega']$.