Abgabetermin: 22.05.2017, 12:00

Aufgabe 1. Sei X ein topologischer Raum, sei $\mathbb{N}$ der Raum der natürlichen Zahlen versehen mit der diskreten Topologie und sei $\mathbb{N}_+$ dessen Einpunktkompaktifizierung. Jede Abbildung $f\colon \mathbb{N} \to X$ ist stetig. Wann existiert eine stetige Abbildung $f_+\colon \mathbb{N}_+ \to X$, so dass $f_+|_{\mathbb{N}} = f$ gilt, d.h. wann existiert eine stetige Erweiterung von f auf die Einpunktkompaktifizierung von $\mathbb{N}$?

Aufgabe 2. Sei X ein topologischer Raum. In dieser Aufgabe zeigen wir, dass X genau dann kompakt ist, wenn jeder Ultrafilter auf X konvergiert:

(i) Sei X kompakt und $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter auf X. Zeigen Sie, dass ein $x \in \bigcap_{F\in\mathcal{F}} \overline{F}$ existiert und dass $\mathcal{F}$ gegen x konvergiert.

(ii) Sei $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine Familie von abgeschlossenen Mengen, die die endliche Durchschnittseigenschaft besitzt. Zeigen Sie, dass ein Filter $\mathcal{F}$ existiert mit $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}$. Schließen Sie, dass X kompakt ist, falls jeder Ultrafilter auf X konvergiert.

Aufgabe 3. Sei (M_i, d_i) eine Familie von metrischen Räumen mit $i \in I$ für eine abzählbare Indexmenge I. Zeigen Sie, dass der Raum $X = \prod_{i\in I} M_i$ mit der Produkttopologie metrisierbar ist, d.h. dass eine Metrik d auf X existiert, so dass die von d induzierte Topologie mit der Produkttopologie übereinstimmt.

Aufgabe 4. Ein *Graph* ist ein Paar (V, E) bestehend aus einer Menge von Knoten V und einer Menge von Kanten $E \subset \mathcal{P}_2(V)$. Hierbei ist $\mathcal{P}_2(V)$ die Menge der 2-elementigen Teilmengen von V. Sei $e = \{v_1, v_2\} \in E$, dann heißen die beiden Knoten v_1 und v_2 *benachbart*. Ein Graph $G = (V, E)$ heißt k-*färbbar*, falls eine Abbildung $f\colon V \to \{1, \dots, k\}$ existiert mit der Eigenschaft, dass für benachbarte Knoten v_1, v_2 gilt $f(v_1) \neq f(v_2)$.

Beweisen Sie den folgenden Satz von De Bruijn und Erdös: *Sei $G = (V, E)$ ein (möglicherweise unendlicher) Graph. Dann ist G genau dann k-färbbar, wenn jeder endliche Untergraph k-färbbar ist.*

Hinweis: Betrachten Sie den *kompakten* Raum $X = \{1, \dots, k\}^V := \prod_{v\in V}\{1, \dots, k\}$ und übersetzen Sie die Menge aller Färbungen eines Untergraphen in einen abgeschlossenen Unterraum von X.