Abgabetermin: 17.07.2017, 12:00

Aufgabe 1. Seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten und $f\colon M \to N$ eine stetige Abbildung. Seien $\mathrm{C}(M, \mathbb{R})$ die stetigen reellwertigen Funktionen auf M und $\mathrm{C}^\infty(M, \mathbb{R}) \subset \mathrm{C}(M, \mathbb{R})$ die C^∞-Funktionen. Sei $f^*\colon \mathrm{C}(N, \mathbb{R}) \to \mathrm{C}(M, \mathbb{R})$ gegeben durch $f^*(\varphi) = \varphi \circ f$.

(i) Seien $U \subseteq \mathbb{R}^m$ und $V \subseteq \mathbb{R}^n$ offene Teilmengen. Zeigen Sie, dass eine stetige Abbildung $f\colon U \to V$ genau dann glatt ist, wenn $f^*(\mathrm{C}^\infty(V, \mathbb{R})) \subseteq \mathrm{C}^\infty(U, \mathbb{R})$.

(ii) Nun seien M und N zwei C^∞-Mannigfaltigkeiten. Schließen Sie, dass eine stetige Abbildung $f\colon M \to N$ genau dann glatt ist, wenn $f^*(\mathrm{C}^\infty(N, \mathbb{R})) \subseteq \mathrm{C}^\infty(M, \mathbb{R})$.

Aufgabe 2. Seien M, $\overline{M}_i$ glatte Mannigfaltigkeiten und $p_i\colon \overline{M}_i \to M$ Überlagerungen ($i = 1, 2$), sodass p_i lokale Diffeomorphismen sind.

(i) Sei $f\colon \overline{M}_1 \to \overline{M}_2$ eine stetige Abbildung sodass $p_2 \circ f = p_1$. Zeigen Sie, dass f glatt ist.

(ii) Sei $p\colon \overline{M} \to M$ eine weitere Überlagerung. Zeigen Sie: Sind $\overline{\mathcal{A}}_1$ und $\overline{\mathcal{A}}_2$ C^∞-Atlanten auf $\overline{M}$, sodass p bezüglich beider ein lokaler Diffeomorphismus ist, dann induziert die Identität einen Diffeomorphismus $(\overline{M}, \overline{\mathcal{A}}_1) \to (\overline{M}, \overline{\mathcal{A}}_2)$.

(iii) Gilt (i) beziehungsweise (ii) weiterhin, wenn man nur annimmt, dass p_i beziehungsweise p glatte Abbildungen sind, aber nicht notwendigerweise lokale Diffeomorphismen?

Aufgabe 3. Sei $\mathbb{C}\mathrm{P}^n = (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})/\sim$, wobei $v \sim w$ genau dann wenn es ein $\lambda \in \mathbb{C}^*$ gibt mit $\lambda\, v = w$. Konstruieren Sie einen C^∞-Atlas für $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$.

Aufgabe 4. Sei $n \in \mathbb{N}$. Sei M eine kompakte n-dimensionale glatte Mannigfaltigkeit und sei N eine zusammenhängende n-dimensionale glatte Mannigfaltigkeit. Sei $h\colon M \to N$ eine Einbettung. Beweisen Sie, dass h ein Diffeomorphismus ist.

Aufgabe 5 (Bonusaufgabe)**.** Sei D die Menge aller (echten) Dreiecke in $\mathbb{R}^2$. Finden Sie eine (sinnvolle) Topologie auf dem Raum D und einen C^∞-Atlas, so dass D eine glatte Mannigfaltigkeit wird.

Aufgabe 6 (Bonusaufgabe)**.** Zeigen Sie, dass $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) = \{T \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \mid \det(T) = 1\}$ eine 3-dimensionale glatte Mannigfaltigkeit ist.