Abgabetermin: keine Abgabe; zur Besprechung beim ersten Übungstermin.

Aufgabe 1. Wie viele Topologien gibt es auf der Menge $\{0, 1, 2\}$? Welche davon sind zueinander homöomorph?

Aufgabe 2. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie, dass

$$|d(x, y) - d(x, z)| \leq d(y, z) \ .$$

Aufgabe 3. Sei $\tau \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ die Menge, die diejenigen Teilmengen von $\mathbb{R}$ enthält, die sich als beliebige Vereinigung von Intervallen der Form $[a, b)$ schreiben lassen.

(i) Zeigen Sie, dass durch τ eine Topologie auf $\mathbb{R}$ gegeben ist.

(ii) Zeigen Sie, dass auch Intervalle der Form (a, b) offen bezüglich dieser Topologie sind.

Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ homöomorph ist zu $\mathrm{S}^{n-1} \times (0, \infty)$, indem sie Abbildungen in beide Richtungen angeben.

Aufgabe 5. Zeigen Sie, dass ein topologischer Raum X genau dann hausdorff ist, wenn die Diagonale $\Delta := \{(x, x) \in X \times X \mid x \in X\}$ abgeschlossen ist.