Aufgabe 1. Sei $p\colon \overline{X} \to X$ eine Überlagerung. Dabei sei $\overline{X}$ wegzusammenhängend. Zeigen Sie, dass die Gruppe der Decktransformationen $\Delta(p)$ eigentlich diskontinuierlich auf $\overline{X}$ wirkt.

Aufgabe 2. Sei $\overline{X}$ wegzusammenhängend und $p\colon \overline{X} \to X$ eine Überlagerung, sei $\bar{x}_0 \in \overline{X}$ und $x_0 = p(\bar{x}_0)$.

(i) Zeigen Sie, dass die Standgruppe $\pi_1(X, x_0)_{\bar{x}_0}$ bezüglich der Wirkung von $\pi_1(X, x_0)$ auf $p^{-1}(x_0)$ mit $p_*\left(\pi_1(\overline{X}, \bar{x}_0)\right)$ übereinstimmt.

(ii) Beweisen Sie, dass p ein Homöomorphismus ist, falls p_* surjektiv ist.

Aufgabe 3. Sei S eine transitive G-Menge. Wir bezeichnen mit $\mathrm{Aut}_G(S)$ die Gruppe der *G-Automorphismen* von S, d.h. die Menge aller bijektiven G-Abbildungen $S \to S$. Sei $s_0 \in S$ und $H := G_{s_0}$.

(i) Sei $\mathrm{N}_G(H) := \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}$ der *Normalisator* von H in G. Zeigen Sie, dass für jedes $g \in \mathrm{N}_G(H)$ die Vorschrift

$$\rho_g\colon S \to S, \quad a \cdot s_0 \mapsto ag^{-1} \cdot s_0 \quad (a \in G)$$

einen wohldefinierten G-Automorphismus definiert.

(ii) Beweisen Sie, dass $\mathrm{Aut}_G(S)$ isomorph zur Quotientengruppe $\mathrm{N}_G(H)/H$ ist.

(iii) Schließen Sie, dass $\mathrm{Aut}_G(S)$ genau dann transitiv auf S wirkt, wenn H eine normale Untergruppe von G ist.

Aufgabe 4. Sei $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter auf der Menge $\mathbb{N}$, der kein Hauptfilter[1] ist. Gegeben eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$, dann heißt $a \in \mathbb{R}$ der $\mathcal{F}$-Limes von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, falls für alle $\epsilon > 0$ die Menge $\{n \in \mathbb{N} \mid |a_n - a| < \epsilon\}$ in $\mathcal{F}$ liegt. In diesem Fall schreiben wir $\lim_{\mathcal{F}} a_n = a$

(i) Zeigen Sie, dass jede beschränkte Folge einen $\mathcal{F}$-Limes besitzt und dass dieser eindeutig ist.

(ii) Zeigen Sie, dass aus $\lim_{\mathcal{F}} a_n = a$ und $\lim_{\mathcal{F}} b_n = b$ folgt, dass auch der $\mathcal{F}$-Limes von $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existiert und dass $\lim_{\mathcal{F}}(a_n + b_n) = a + b$. Sei $c \in \mathbb{R}$, dann gilt auch $\lim_{\mathcal{F}}(c \cdot a_n) = c \cdot \lim_{\mathcal{F}} a_n$.

(iii) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $\lim_{\mathcal{F}} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n$.

[1]Ein Hauptfilter auf einer Menge X ist ein Filter von der Form $\mathcal{F}_a := \{A \in \mathcal{P}(X) \mid a \in A\}$ für ein $a \in X$.