Aufgabe 1. Sei M das Möbiusband, d.h. $M = ([0,1] \times [-1,1])/\sim$ ist der topologische Raum mit der Quotiententopologie bezüglich der Äquivalenzrelation $(0, y) \sim (1, -y)$. Sei S das Bild von $[0,1] \times \{0\}$ in M unter der Quotientenabbildung. Zeigen Sie, dass $M \setminus S$ wegzusammenhängend ist.

Aufgabe 2. (i) Zeigen Sie, dass jeder kompakte topologische Raum normal ist.

(ii) Sei X ein lokalkompakter topologischer Raum mit $x, y \in X$ und $x \neq y$. Konstruieren Sie eine stetige Funktion $f\colon X \to [0,1]$ mit $f(x) \neq f(y)$.

Aufgabe 3. Sei $A = \left\{ p \mid p(z) = \sum_{j=-n}^{n} a_j z^j, a_j \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}_0 \right\} \subset C(S^1, \mathbb{C})$ die angegebene Unteralgebra der komplexwertigen Funktionen auf dem Kreis S^1. Zeigen Sie, dass A dicht in $C(S^1, \mathbb{C})$ ist.

Aufgabe 4. Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $GL_n(\mathbb{C}) \subset M_n(\mathbb{C})$ die Gruppe der invertierbaren $n \times n$-Matrizen versehen mit der Unterraumtopologie von $M_n(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^{n^2}$. Seien ω und ω' zwei Schleifen in $GL_n(\mathbb{C})$ mit $\omega(0) = \omega'(0) = 1_n$. Zeigen Sie, dass die beiden Schleifen $t \mapsto \omega(t) \cdot \omega'(t)$ (Matrixmultiplikation!) und $t \mapsto \omega'(t) \cdot \omega(t)$ jeweils das selbe Element wie $\omega * \omega'$ in $\pi_1(GL_n(\mathbb{C}), 1_n)$ repräsentieren. Schließen Sie, dass $\pi_1(GL_n(\mathbb{C}), 1_n)$ eine abelsche Gruppe ist.

Aufgabe 5 (Bonusaufgabe)**.** Sei $\mathcal{O}$ eine Topologie auf X. Dann wissen wir für jede Folge (x_n) in X und jedes $x \in X$, ob $x_n \to x$ oder nicht. Mit anderen Worten, eine Topologie legt einen Konvergenzbegriff für Folgen in X fest. Diskutieren Sie inwieweit eine Umkehrung davon möglich ist:

(i) Welche Eigenschaften sollte ein Konvergenzbegriff für Folgen sinnvollerweise haben?

(ii) Kommt dann jeder sinnvolle Konvergenzbegriff für Folgen von einer Topologie auf X?

(iii) Legt dieser Konvergenzbegriff die Topologie auf X schon eindeutig fest oder muss man dafür zusätzliche Bedingungen an die Topologie stellen?