Grundlagen der Analysis, Topologie und Geometrie **Blatt 5**
A. Bartels, R. Zeidler SS17

Abgabetermin: 29.05.2017, 12:00

Aufgabe 1. Sei X ein lokalkompakter topologischer Raum, sei $\overline{X}$ eine beliebige Kompaktifizierung von X und sei X_+ die Einpunktkompaktifizierung von X. Zeigen Sie, dass eine stetige Abbildung $f\colon \overline{X} \to X_+$ existiert, so dass $X \to \overline{X} \to X_+$ mit der Inklusion $X \subset X_+$ übereinstimmt.

Aufgabe 2. Sei $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ und $\lambda > 0$. Sei $\mathcal{A}$ die reelle Algebra, die generiert wird durch die Funktion $t \mapsto e^{-\lambda t}$, d.h. ein allgemeines Element in $\mathcal{A}$ ist von der Form $t \mapsto p(e^{-\lambda t})$ für ein Polynom p mit reellen Koeffizienten und $p(0) = 0$.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{A} \subset C_0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ eine dichte Unteralgebra ist.

(b) Sei $g \in C_c(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \subset C_0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ eine Funktion mit kompaktem Träger mit der Eigenschaft

$$\int_0^\infty g(t)e^{-\lambda t}dt = 0 \quad \text{für alle } \lambda > 0\,.$$

Zeigen Sie, dass $g \equiv 0$ gilt.

Hinweis: Die Funktion $\lambda \mapsto \int_0^\infty g(t)e^{-\lambda t}dt$ heißt auch die *Laplace-Transformierte* von g.

Aufgabe 3. Sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung und $\mathcal{F}$ ein Filter auf X. Wir bezeichnen mit $f_*\mathcal{F}$ den Filter $\{E \subseteq Y \mid f^{-1}(E) \in \mathcal{F}\}$ auf Y.

(i) Zeigen Sie, dass $f_*\mathcal{F}$ ein Ultrafilter ist, wenn $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter ist.

(ii) Sei $(X_i)_{i\in I}$ eine Familie topologischer Räume und $\mathbf{X} = \prod_i X_i$, wobei wir $\mathbf{X}$ mit der Produkttopologie versehen. Zeigen Sie, dass ein Filter $\mathcal{F}$ auf $\mathbf{X}$ gegen $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ konvergiert, wenn $(p_i)_*\mathcal{F}$ gegen $p_i(\mathbf{x})$ konvergiert für jedes $i \in I$.

(iii) Verwenden Sie (i) und (ii) gemeinsam mit Aufgabe 2 von Blatt 4, um den Satz von Tychonov zu beweisen.

Aufgabe 4. Sei M eine wegzusammenhängende topologische Mannigfaltigkeit der Dimension mindestens zwei. Sei $p \in M$. Zeigen Sie, dass $M \setminus \{p\}$ wegzusammenhängend ist.