Abgabetermin: 15.05.2017, 12:00

Aufgabe 1. Sei $(X_i)_{i\in I}$ eine Familie topologischer Räume und $\mathbf{X} = \prod_i X_i$, wobei wir $\mathbf{X}$ mit der Produkttopologie versehen. Sei $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ und $(\mathbf{x}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ein Netz in $\mathbf{X}$. Zeigen Sie, dass $\mathbf{x}_\lambda \to \mathbf{x}$ genau dann gilt, wenn $p_i(\mathbf{x}_\lambda) \to p_i(\mathbf{x})$ für jedes $i \in I$.

Aufgabe 2. Sei $\mathcal{F}$ ein Filter auf X. Eine Teilmenge $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$ heißt *Filterbasis für $\mathcal{F}$*, falls jedes Element aus $\mathcal{F}$ ein Element aus $\mathcal{F}_0$ als Teilmenge enthält.

(i) Sei $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine nicht-leere Familie von nicht-leeren Mengen, sodass für alle $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ ein $A \in \mathcal{B}$ existiert mit $A \subseteq B_1 \cap B_2$. Zeigen Sie, dass genau ein Filter existiert, für den $\mathcal{B}$ eine Filterbasis ist.

(ii) Zeigen Sie, dass jeder Filter in einem Ultrafilter enthalten ist.

Aufgabe 3. Sei X ein topologischer Raum und sei $S \subset X$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(a) $x \in \overline{S}$,

(b) es existiert ein Filter $\mathcal{F}$ auf X mit $S \in \mathcal{F}$ und $\mathcal{F} \to x$,

(c) es existiert ein Netz $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ in S mit $x_\lambda \to x$.

Aufgabe 4. Sei (M, d) ein kompakter metrischer Raum und $f\colon M \to M$ eine Abbildung mit der Eigenschaft

$$d(f(x), f(y)) = d(x, y)$$

für alle $x, y \in M$. Beweisen Sie, dass f bijektiv ist.

Hinweis: Betrachten Sie für die Surjektivität die Folge $f^n(x) := (f \circ \cdots \circ f)(x)$.