Grundlagen der Analysis, Topologie und Geometrie **Blatt 7**

A. Bartels, R. Zeidler SS17

Abgabetermin: 19.06.2017, 12:00

Aufgabe 1. Sei $\mathbb{R}\mathrm{P}^n = (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})/{\sim}$ der reelle projektive Raum. Sei $p\colon \mathrm{S}^n \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ jene Abbildung, die durch Komposition der Inklusion $\mathrm{S}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ mit der Quotientenabbildung $q\colon \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ definiert ist. Zeigen Sie, dass p eine Überlagerung ist.

Aufgabe 2. Sei $n > 1$. Sei $z_0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ mit $\|z_0\| = 1$ und sei z_1 ein Vektor orthogonal zu z_0 mit $\|z_1\| = 1$. Sei $\widehat{\gamma}\colon [0,1] \to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ der Pfad gegeben durch $\widehat{\gamma}(t) = \cos(\pi t)\, z_0 + \sin(\pi t)\, z_1$. Sei $x_0 \in \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ das Bild von z_0 und sei $\gamma\colon \mathrm{S}^1 \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ die von $\widehat{\gamma}$ induzierte Schleife in $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$. Zeigen Sie, dass $[\gamma]^2 = 1$ in $\pi_1(\mathbb{R}\mathrm{P}^n, x_0)$ gilt.

Aufgabe 3. Sei X ein topologischer Raum und sei $q\colon \bar{X} \to X$ eine Überlagerung. Sei $y_0 \in \bar{X}$ und $x_0 = q(y_0)$. Zeigen Sie, dass die Abbildung $q_*\colon \pi_1(\bar{X}, y_0) \to \pi_1(X, x_0)$ injektiv ist.

Aufgabe 4. Sei X ein lokalkompakter Hausdorffraum. Sei $C(X,[0,1])$ die Menge der stetigen Funktionen $f\colon X \to [0,1]$. Sei

$$Z = \prod_{f \in C(X,[0,1])} [0,1] = [0,1]^{C(X,[0,1])}$$

Dann ist Z kompakt nach dem Satz von Tychonoff. Sei $\Theta\colon X \to Z$ gegeben durch $\Theta(x) = \mathrm{ev}_x$ mit $\mathrm{ev}_x(f) = f(x)$. Der Abschluss des Bildes von Θ heißt auch *Stone-Cech-Kompaktifizierung* von X und wird durch $\beta X = \overline{\Theta(X)}$ notiert.

(a) Zeigen Sie, dass die durch Θ induzierte Abbildung $X \to \beta X$ injektiv und stetig ist.

(b) Sei Y ein kompakter topologischer Raum. Zeigen Sie, dass $Y \to \beta Y$ ein Homöomorphismus ist.

Hinweis: Verwenden Sie (ohne Beweis), dass eine stetige Bijektion zwischen einem kompakten Raum und einem Hausdorffraum ein Homöomorphismus ist.

(c) Sei Y ein kompakter topologischer Raum und $f\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung. Zeigen Sie, dass eine stetige Abbildung $\overline{f}\colon \beta X \to Y$ existiert, so dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d] & Y \\ \beta X \arrow[ur, "\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

kommutiert.