Westfälische
Wilhelms-Universität
Münster

Fachbereich 10
Mathematik und
Informatik

# Grundlagen der Analysis, Topologie, Geometrie

## Überarbeitung einer geTeXten Vorlesungsmitschrift von Jannes Bantje aus dem Sommersemester 2014

Arthur Bartels

13. Juli 2017

# Inhaltsverzeichnis

# 1 Topologische Räume

**1.1 Definition.** Ein ***metrischer Raum*** $(X, d)$ ist eine Menge $X$ mit einer Abbildung, ***Metrik*** genannt, $d \colon X \times X \to [0, \infty)$ mit den folgenden Eigenschaften:

**(i)** $\forall x, y \in X : d(x, y) = d(y, x)$,

**(ii)** $\forall x, y \in X : d(x, y) = 0 \iff x = y$ und

**(iii)** $\forall x, y, z \in X : d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$ (Dreiecksungleichung)

**1.2 Definition.** Sei $V$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Eine ***Norm*** auf $V$ ist eine Abbildung $\|.\| \colon V \to [0, \infty)$ mit den folgenden Eigenschaften:

**(i)** $\forall v \in V, \lambda \in \mathbb{R} : \|\lambda \cdot v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$,

**(ii)** $\forall v \in V : \|v\| = 0 \iff v = 0$

**(iii)** $\forall v, w \in V : \|v + w\| \leqslant \|v\| + \|w\|$ (Dreiecksungleichung)

Durch $d(v, w) := \|v - w\|$ erhalten wir eine Metrik auf $V$ wie man sich leicht klarmacht.

**1.3 Beispiel.** Auf $\mathbb{R}^n$ gibt es verschiedene Normen und damit auch verschiedene Metriken: Für $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ definiert man

**(i)** $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$

**(ii)** $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$

**(iii)** $\|x\|_\infty = \max\{|x_i| \mid i = 1, \ldots, n\}$

**1.4 Beispiel.** Man kann Metriken auch anderweitig definieren:

**(i)** Auf der ***1-Sphäre*** $S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ wird durch $d(z, z') := \min\{|\theta| \mid \theta \in \mathbb{R} : z = e^{i\theta} \cdot z'\}$ eine Metrik definiert.

**(ii)** Ist $X$ ein metrischer Raum und $A$ eine Teilmenge von $X$, so wird $A$ durch die Einschränkung der Metrik auf $A$ zu einem metrischen Raum. Wir sagen dann $A$ ist ein Unterraum von $X$.

**(iii)** Sei $X$ eine beliebige Menge. Durch

$$d(x, y) := \begin{cases} 0, & \text{falls } x = y \\ 1, & \text{falls } x \neq y \end{cases}$$

wird auf $X$ eine Metrik, die ***diskrete Metrik***, definiert.

**(iv)** Sei $p$ eine Primzahl. Jedes $x \neq 0 \in \mathbb{Q}$ lässt sich eindeutig schreiben als $x = \frac{a}{b} p^n$ mit $n, a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$ und $a, b, p$ paarweise teilerfremd. Dann heißt

$$|x|_p := p^{-n}$$

der $p$-***adische Betrag*** von $x$. Setzt man $|0|_p := 0$, so erhält man durch $d_p(x, y) := |x - y|_p$ die $p$-adische Metrik auf $\mathbb{Q}$.

**1.5 Definition.** Seien $(X, d_X)$ und $(Y, d_Y)$ zwei metrische Räume. Eine Abbildung $f \colon X \to Y$ heißt eine ***Isometrie***, falls für alle $x, x' \in X$

$$d_Y\big(f(x), f(x')\big) = d_X(x, x')$$

gilt. $f$ heißt ***stetig***, falls für alle $x_0 \in X$ gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : d_X(x, x_0) < \delta \implies d_Y\big(f(x), f(x_0)\big) < \varepsilon$$

**1.6 Definition.** Eine Teilmenge $U$ eines metrischen Raumes $X$ heißt ***offen***, falls gilt

$$\forall x \in U : \exists \delta > 0 \text{ mit } B_\delta(x) = \big\{y \in X \,\big|\, d(x, y) < \delta\big\} \subseteq U$$

**1.7 Lemma.** Sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung zwischen metrischen Räumen. Dann sind äquivalent:

**(i)** $f$ ist stetig

**(ii)** Urbilder offener Mengen in $Y$ sind offen in $X$; also

$$\forall\, U \subseteq Y \text{ offen} : f^{-1}(U) \subseteq X \text{ offen}$$

**Beweis:** *Siehe Analysis II.* □

**1.8 Definition.** Ein ***topologischer Raum*** $(X, \mathcal{O})$ ist eine Menge $X$ zusammen mit einer Familie $\mathcal{O}$ von Teilmengen von $X$, sodass gilt:

**(i)** $\emptyset, X \in \mathcal{O}$

**(ii)** $U, V \in \mathcal{O} \implies U \cap V \in \mathcal{O}$

**(iii)** Ist $I$ eine Indexmenge und $U_i \in \mathcal{O}$ für $i \in I$, so gilt $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{O}$.

$\mathcal{O}$ heißt dann eine ***Topologie*** auf $X$. $U \subseteq X$ heißt ***offen***, falls $U \in \mathcal{O}$. $A \subseteq X$ heißt ***abgeschlossen***, falls $X \setminus A$ offen ist.

**1.9 Beispiel.** **(i)** Jeder metrische Raum wird durch

$$\mathcal{O} := \big\{U \subseteq X \,\big|\, U \text{ ist offen im Sinne von Definition 1.6}\big\}$$

zu einem topologischen Raum.

**(ii)** Sei $X$ eine beliebige Menge.

- **(a)** Die ***grobe Topologie*** ist $\mathcal{O}_{\text{grob}} := \{\emptyset, X\}$.
- **(b)** Die ***diskrete Topologie*** ist $\mathcal{O}_{\text{diskret}} := \mathcal{P}(X)$.
- **(c)** Die ***koendliche Topologie*** ist $\mathcal{O}_{\text{koendl.}} := \{U \subseteq X \mid X \setminus U \text{ endlich}\} \cup \{\emptyset\}$.

**1.10 Definition.** Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ zwischen topologischen Räumen heißt ***stetig***, wenn Urbilder von offener Mengen offen sind.

**1.11 Lemma.** Seien $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to Z$ stetige Abbildungen. Dann ist auch $g \circ f\colon X \to Z$ stetig.

**Beweis:** Sei $U \subseteq Z$ offen. Dann ist $g^{-1}(U) \subseteq Y$ offen, da $g$ stetig ist. Da auch $f$ stetig ist, gilt $(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}\big(g^{-1}(U)\big) \subseteq X$ offen. □

**1.12 Definition.** Seien $X, Y$ topologische Räume. Eine bijektive stetige Abbildung $f\colon X \to Y$ heißt ***Homöomorphismus***, falls auch ihre Umkehrabbildung $f^{-1}\colon Y \to X$ stetig ist.

Gibt es einen solchen Homöomorphismus, so heißen $X$ und $Y$ ***homöomorph*** und wir schreiben $X \cong Y$, andernfalls $X \ncong Y$.

**1.13 Beispiel.** **(i)** Es gilt $(0,1) \cong (0,\infty) \cong (-\infty,0) \cong \mathbb{R}$. Diese Homöomorphismen kann man leicht explizit hinschreiben.

**(ii)** Es gilt $(0,1) \ncong [0,1) \ncong [0,1] \ncong (0,1)$. Dies zeigen wir in einer Übungsaufgabe.

**(iii)** Es gilt
$$\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^m \iff n = m.$$
Im Rahmen dieser Vorlesung werden wir nur Spezialfälle dieser Aussage (topologische Invarianz der Dimension) beweisen können.

**1.14 Definition.** Sei $X$ ein topologischer Raum. Eine Familie $\mathcal{U}$ von offenen Teilmengen von $X$ heißt eine ***Basis der Topologie***, falls für jede Teilmenge $W \subseteq X$ äquivalent sind:

**(1)** $W$ ist offen.

**(2)** $\forall x \in W : \exists U \in \mathcal{U}$ mit $x \in U \subseteq W \iff W = \bigcup_{\substack{U \in \mathcal{U} \\ U \subseteq W}} U$.

Man sagt $X$ erfüllt das ***zweite Abzählbarkeitsaxiom***, falls $X$ eine abzählbare Basis der Topologie besitzt.

**1.15 Beispiel.** Sei $X$ ein metrischer Raum. Dann ist $\{B_\delta(x) \mid x \in X, \delta > 0\}$ eine Basis der Topologie von $X$ nach Definition 1.6. Gibt es eine abzählbare dichte Teilmenge $X_0 \subseteq X$, so ist
$$\left\{B_{1/n}(x) \,\middle|\, x \in X_0, n \in \mathbb{N}\right\}$$
eine abzählbare Basis der Topologie von $X$ und $X$ erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom.

**1.16 Proposition.** Sei $X$ eine Menge und $\mathcal{U}$ eine Familie von Teilmengen von $X$ mit $X = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$. Dann ist $\mathcal{U}$ genau dann die Basis *einer* Topologie $\mathcal{O}$ auf $X$, wenn $\mathcal{U}$ die folgende Bedingung erfüllt:
$$\forall U, V \in \mathcal{U} : \forall x \in U \cap V : \exists W \in \mathcal{U} \text{ mit } x \in W \subseteq U \cap V \qquad [\#]$$
In diesem Fall ist die Topologie $\mathcal{O}$ eindeutig bestimmt und es gilt
$$\mathcal{O} = \{W \subseteq X \forall x \in W : \exists U \in \mathcal{U} \text{ mit } x \in U \subseteq W\}.$$

**Beweis:** Sei $\mathcal{U}$ die Basis der Topologie $\mathcal{O}$ und $U, V \in \mathcal{U}$. Per Definition sind $U, V$ offen, also ist auch $U \cap V$ offen. Da $\mathcal{U}$ eine Basis der Topologie ist, gibt es zu jedem $x \in U \cap V$ ein $W \in \mathcal{U}$ mit $x \in W \subseteq U \cap V$. Daher gilt [#].

Sei umgekehrt [#] erfüllt. Definiere eine Topologie $\mathcal{O}$ durch
$$W \in \mathcal{O} :\iff \forall x \in W : \exists U \in \mathcal{U} : x \in U \subseteq W.$$
Dann ist $\emptyset \in \mathcal{O}$. Wegen $X = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$ gilt auch $X \in \mathcal{O}$. Weiter ist $\mathcal{O}$ offenbar unter Vereinigungen abgeschlossen. Seien $W_1, W_2 \in \mathcal{O}$ und $x \in W_1 \cap W_2$. Dann gilt
$$\begin{aligned} x \in W_1, W_1 \text{ offen} &\implies \exists U_1 \in \mathcal{U} : x \in U_1 \subseteq W_1 \\ x \in W_2, W_2 \text{ offen} &\implies \exists U_2 \in \mathcal{U} : x \in U_2 \subseteq W_2 \end{aligned}$$
Also $x \in U_1 \cap U_2$. Mit [#] folgt: $\exists W \in \mathcal{U}$ mit $x \in W \subseteq U_1 \cap U_2 \subseteq W_1 \cap W_2$. □

**1.17 Beispiel.** ▸ Sei $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller reellen Folgen. Für eine Konstante $\delta > 0$, eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ und Punkte $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ sei
$$U_{n,\delta,\alpha_1,\ldots,\alpha_n} := \left\{(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \,\middle|\, |x_i - \alpha_i| < \delta \text{ für } i = 1, \ldots, n\right\}$$
Dann erfüllt $\mathcal{U} := \{U_{n,\delta,\alpha_1,\ldots,\alpha_n} \mid n \in \mathbb{N}, \alpha_i \in \mathbb{R}, \delta > 0\}$ die Bedingung [#] und ist die Basis der ***Topologie der punktweisen Konvergenz***.

- Sei $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller stetigen Abbildungen. Zu $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $\delta > 0$, $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig sei
$$U_{a,b,\delta,g} := \left\{ f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ stetig} \;\middle|\; \forall t \in [a,b] : \left| f(t) - g(t) \right| < \delta \right\}.$$
Dann erfüllt $\mathcal{U} := \{U_{a,b,\delta,g}\}$ die Bedingung **[#]** und ist die Basis der ***Topologie der gleichmäßigen Konvergenz*** auf kompakten Intervallen.

**1.18 Definition.** Sei $Y$ eine Teilmenge eines topologischen Raums $X$.

$$\mathring{Y} := \{y \in Y \mid \exists U \subseteq X \text{ offen mit } y \in U \subseteq Y\} \text{ heißt das \textbf{\textit{Innere}} von } Y.$$
$$\overline{Y} := \{x \in X \mid \forall U \subseteq X \text{ offen mit } x \in U : U \cap Y \neq \emptyset\} \text{ heißt \textbf{\textit{Abschluss}} von } Y.$$
$$\partial Y := \overline{Y} \setminus \mathring{Y} \text{ heißt der \textbf{\textit{Rand}} von } Y.$$

**1.19 Bemerkung.** Es gilt

**1)** $\mathring{Y} = X \setminus (\overline{X \setminus Y})$, $\overline{Y} = X \setminus (X \setminus Y)^\circ$.

**2)** $\mathring{Y} = \bigcup_{\substack{U \subseteq Y \\ U \text{ offen}}} U$ ist offen.

**3)** $\overline{Y} = \bigcap_{Y \subseteq A, A \text{ abg.}} A$ ist abgeschlossen.

**4)** $\partial Y = \overline{Y} \setminus \mathring{Y}$ ist abgeschlossen.

**1.20 Definition.** Sei $X$ ein topologischer Raum und $x \in X$. $V \subseteq X$ heißt eine ***Umgebung*** von $x$, falls es $U \subseteq X$ offen gibt mit $x \in U \subseteq V$. Ist $V$ offen, so heißt $V$ eine ***offene Umgebung*** von $x$.

**1.21 Definition.** Ein topologischer Raum $X$ heißt ***hausdorffsch*** (oder ein ***Hausdorffraum***), falls es zu jedem Paar $x, y \in X, x \neq y$ offene Umgebungen $U$ von $x$ und $V$ von $y$ gibt mit $U \cap V = \emptyset$.

Metrische Räume sind stets hausdorffsch. Ist $|X| \geqslant 2$ so ist $(X, \mathcal{O}_{\text{grob}})$ nicht hausdorffsch.

**1.22 Definition.** Ein Hausdorffraum $M$, der das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, heißt eine ***topologische Mannigfaltigkeit*** der Dimension $n$ (oder eine $n$-Mannigfaltigkeit), falls er lokal homöomorph zum $\mathbb{R}^n$ ist; d.h. $\forall x \in M$ existiert eine offene Umgebung $U$ von $x$ mit $U \cong \mathbb{R}^n$.

# 2 Konstruktion topologischer Räume

**2.1 Definition.** Sei $X$ ein topologischer Raum und $A \subseteq X$. Die ***Spurtopologie***, ***Teilraumtopologie*** oder ***Unterraumtopologie*** auf $A$ besteht aus allen Teilmengen von $A$ der Form $A \cap U$ mit $U \subseteq X$ offen. Mit dieser Topologie heißt $A$ ein ***Unterraum*** von $X$.

*Achtung:* $U \subseteq A$ *offen* $\not\Rightarrow$ $U \subseteq X$ *offen!*

**2.2 Bemerkung.** Sei $i\colon A \hookrightarrow X$ die Inklusion. Dann ist $i$ stetig und falls $Y$ ein weiterer topologischer Raum ist und $f\colon Y \to A$ eine Abbildung, so gilt

$$f \text{ stetig} \iff i \circ f\colon Y \to X \text{ stetig}$$

**2.3 Definition.** Seien $X, Y$ topologische Räume. Eine Basis für die ***Produkttopologie*** auf $X \times Y$ ist

$$\mathcal{U} := \{U \times V \mid U \subseteq X \text{ offen }, V \subseteq Y \text{ offen}\}.$$

Dies können wir auf das Produkt beliebig vieler topologischer Räume verallgemeinern:

**2.4 Definition.** Seien $X_i$ für $i \in I$ topologische Räume. Die ***Produkttopologie*** auf ihrem Produkt

$$\prod_{i \in I} X_i = \{(x_i)_{i \in I} \mid x_i \in X_i\}$$

hat als Basis alle Mengen der Form $\prod_{i \in I} U_i$ mit

**(i)** $U_i \subseteq X_i$ ist offen

**(ii)** Für fast alle $i$ ist $U_i = X_i$ (also für alle bis auf endlich viele $i$).

**2.5 Bemerkung.** Seien $p_j\colon \prod_{i \in I} X_i \to X_j$ die Projektionen auf die einzelnen Koordinaten. Dann sind die $p_j$ alle stetig und die folgende universelle Eigenschaft ist erfüllt:

Ist $Y$ ein weiterer topologischer Raum und $f\colon Y \to \prod_{i \in I} X_i$ eine Abbildung, so gilt:

$$f \text{ stetig} \iff \forall j : f_j := p_j \circ f \text{ stetig}$$

**2.6 Bemerkung.** Die übliche Topologie auf $\mathbb{R}^n = \prod_{i=1}^n \mathbb{R}$ stimmt mit der eben definierten Produkttopologie überein.

**2.7 Beispiel.** Mit Produkten lassen sich viele interessante topologische Räumen „bauen"; setze zum Beispiel

$$T^n := \underbrace{S^1 \times \ldots \times S^1}_{n} = \prod_{i=1}^{n} S^1$$

$T^n$ heißt der $n$-***Torus***. Der $n$-Torus ist eine (glatte) $n$-Mannigfaltigkeit.

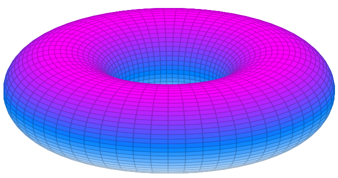


**Abbildung 1:** Der Torus $T^2$, `Quelle`

**2.8 Definition.** Seien $X$ und $Y$ topologische Räume und $(f_t)_{t\in[0,1]}$ eine Familie von stetigen Abbildungen $f_t \colon X \to Y$. Wir sagen, dass die $f_t$ stetig von $t$ abhängen, falls

$$H \colon X \times [0,1] \longrightarrow Y \text{ mit } H(x,t) = f_t(x)$$

stetig bezüglich der Produkttopologie ist. In diesem Fall heißen $f_0$ und $f_1$ ***homotop*** und $H$ eine ***Homotopie*** zwischen $f_0$ und $f_1$.

Beispielsweise sind je zwei Abbildungen $f, g \colon X \to \mathbb{R}^n$ homotop; eine Homotopie wird gegeben durch $H(x,t) := (1-t)\cdot f(x) + t \cdot g(x)$. Wir werden später sehen, dass die Identität $\mathrm{id} \colon S^1 \to S^1$ nicht homotop zu einer konstanten Abbildung ist.

**2.9 Definition.** Sei $X$ ein topologischer Raum, $M$ eine Menge und $q \colon X \to M$ eine surjektive Abbildung. Die offenen Mengen der ***Quotiententopologie*** auf $M$ (bezüglich $q$) sind alle $U \subseteq M$ für die $q^{-1}(U) \subseteq X$ offen ist.

Die Quotiententopologie ist gerade so definiert, dass $q \colon X \to M$ stetig ist. Außerdem ist wieder eine universelle Eigenschaft erfüllt, nämlich die folgende:

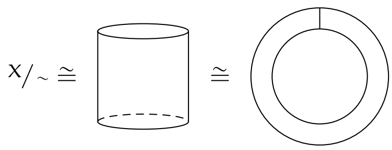
Ist $Y$ ein weiterer topologischer Raum und $f : M \to Y$ eine Abbildung, so gilt

$$f \text{ stetig} \iff f \circ q \text{ stetig}$$

Die Quotiententopologie wird oft wie folgt eingesetzt: Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf dem topologischen Raum $X$. Dann ist die Äquivalenzklassenabbildung $q \colon X \to X/{\sim}$, $x \mapsto [x]_\sim$ surjektiv. Insbesondere wird $X/{\sim}$ durch die Quotiententopologie zu einem topologischen Raum.

**2.10 Beispiel.** Betrachte $X = [0,1] \times \mathbb{R}$.

**(i)** Definiere $(s,t) \sim (s',t') :\Leftrightarrow (s = s' \text{ und } t = t')$ oder $(s = 0, s' = 1, t = t')$. Dann erhalten wir einen Zylinder




Anschaulich haben wir zwei gegenüberliegende Seiten „zusammengeklebt".

**(ii)** Definieren wird stattdessen $(s,t) \sim (s',t') :\Leftrightarrow (s = s' \text{ und } t = t')$ oder $(s = 0, s' = 1 \text{ und } t = -t')$. Dann erhalten wir das Möbiusband, siehe Abbildung 2. Hier haben wir anschaulich gesprochen $X$ verdreht und dann zusammengeklebt.

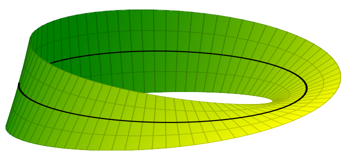


**Abbildung 2:** Möbius-Band, `Quelle`

**(iii)** Sei $\mathbb{R}P^n$ die Menge aller 1-dimensionalen Unterräume des $\mathbb{R}^{n+1}$. Wir erhalten eine surjektive Abbildung

$$q \colon \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}P^n \quad , \quad q(v) := \langle v \rangle$$

$\mathbb{R}P^n$ mit der Quotiententopologie bezüglich $q$ heißt der ***reell projektive Raum*** der Dimension $n$. Er ist eine $n$-Mannigfaltigkeit.

**(iv)** Betrachte auf $\mathbb{R} \times \{0, 1\}$ die Äquivalenzrelation die durch

$$(x, t) \sim (x', t') :\Leftrightarrow x = x' \text{ und } (t = t' \text{ oder } x \neq 0)$$

definiert wird. Dann ist $\mathbb{R} \times \{0, 1\}/\sim$ nicht hausdorffsch (obwohl $\mathbb{R} \times \{0, 1\}$ natürlich hausdorffsch ist).

**(v)** Betrachte auf $\mathbb{R}$ die Relation $x \sim y :\Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$. Dann ist die Quotiententopologie auf $\mathbb{R}/\sim$ die grobe Topologie.

**(vi)** Sei $f\colon X \to X$ eine stetige Abbildung. Betrachte auf $X \times [0, 1]$ die Äquivalenzrelation

$$(x, t) \sim (x', t') :\Longleftrightarrow (x = x' \text{ und } t = t') \text{ oder } (t = 0, t' = 1 \text{ und } x' = f(x))$$

Der Quotient $T_f := {}^{X \times [0,1]}/_{\sim}$ heißt der ***Abbildungstorus*** von $f$.

Beispiel: Betrachte $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = -x$. Dann ist $T_f$ das Möbiusband von eben.

# 3 Konvergenz

**3.1 Definition.** Sei $X$ ein topologischer Raum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $X$. Dann sagen wir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***konvergiert*** gegen $x \in X$, falls gilt:

$$\text{Zu jeder offenen Umgebung } V \text{ von } x\text{, gibt es } N \in \mathbb{N}\text{, sodass } x_n \in V \text{ für alle } n \geqslant N.$$

Wir schreiben dann $x_n \longrightarrow x$ oder $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$. Der Punkt $x$ heißt ***Grenzwert*** von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Wir stellen fest: Bezüglich der groben Topologie ist jeder Punkt Grenzwert jeder Folge.

Betrachte die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf kompakten Teilmengen (siehe Beispiel 1.17) auf dem Raum $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Dann gilt für Folgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von stetigen Abbildungen $f_n \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$

$$f_n \longrightarrow f \iff \forall a < b \text{ konvergiert } f_n|_{[a,b]} \longrightarrow f_{[a,b]} \text{ gleichmäßig.}$$

**3.2 Lemma.** Sei $X$ hausdorffsch. Gilt $x_n \longrightarrow x$ und $x_n \longrightarrow y$, so folgt $x = y$.

**Beweis:** *Übung!* □

**3.3 Definition.** Eine nichtleere Menge $\Lambda$ mit einer Relation $\leqslant$ heißt ***gerichtet***, falls gilt

**(i)** $\forall \lambda \in \Lambda : \lambda \leqslant \lambda$

**(ii)** $\forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \Lambda : (\lambda_1 \leqslant \lambda_2) \wedge (\lambda_2 \leqslant \lambda_3) \implies \lambda_1 \leqslant \lambda_3$ (transitiv)

**(iii)** $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda : \exists \mu : (\lambda_1 \leqslant \mu) \wedge (\lambda_2 \leqslant \mu)$

**3.4 Definition.** Sei $X$ ein topologischer Raum. Ein ***Netz*** $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ in $X$ besteht aus einer gerichteten Menge $\Lambda$ und Elementen $x_\lambda \in X$ für $\lambda \in \Lambda$. Für $x \in X$ sagen wir $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ***konvergiert*** gegen $x$, falls gilt:

$$\forall \text{ Umgebungen } U \text{ von } x : \exists \lambda_0 \in \Lambda : \forall \lambda \in \Lambda \text{ mit } \lambda \geqslant \lambda_0 \text{ gilt } x_\lambda \in U$$

Wir schreiben dann $x_\lambda \xrightarrow{\lambda\to\infty} x$ oder $x_\lambda \longrightarrow x$.

Es sei $X$ ein topologischer Raum und $x \in X$ ein Punkt.Dann ist die Menge $\Lambda$ aller offenen Umgebungen von $x$ gerichtet bezüglich

$$U \leqslant V :\iff V \subseteq U$$

Ist nun $x_U \in U$ für alle $U \in \Lambda$ so gilt $x_U \longrightarrow x$.

**3.5 Lemma.** Sei $X$ hausdorffsch. Gilt $x_\lambda \longrightarrow x$ und $x_\lambda \longrightarrow y$, so folgt $x = y$.

**Beweis:** Angenommen es gilt $x \neq y$. Da $X$ hausdorffsch ist, existiert dann eine Umgebung $U$ von $x$ und $V$ von $y$ mit $U \cap V = \emptyset$. Da $x_\lambda \longrightarrow x$ finden wir $\lambda_U$, sodass $x_\lambda \in u$ für alle $\lambda \geqslant \lambda_U$. Genauso finden wir $\lambda_V$, sodass $x_\lambda \in V$ für alle $\lambda \geqslant \lambda_V$. Sei nun $\mu \in \Lambda$ mit $\mu \geqslant \lambda_U$ und $\mu \geqslant \lambda_V$. Dann folgt $x_\mu \in U \cap V = \emptyset$. Widerspruch! □

*Ein Teilnetz einer Folge ist nicht notwendig eine Teilfolge!*

**3.6 Definition.** Sei $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ein Netz in $X$. Ein ***Teilnetz*** von $(x_{\lambda'})_{\lambda'\in\Lambda'}$ ist eine gerichtete Menge $\Lambda'$ mit einer Abbildung $f\colon \Lambda' \to \Lambda$, so dass gilt

**i)** $\lambda_1' \leqslant \lambda_2' \implies f(\lambda_1') \leqslant f(\lambda_2')$ (f erhält „$\leqslant$")

**ii)** $\forall \lambda \in \Lambda : \exists \lambda' \in \Lambda' \text{ mit } \lambda \leqslant f(\lambda')$ (f ist kofinal)

Oft schreiben wir dann $\left(x_{f(\lambda')}\right)_{\lambda'\in\Lambda'}$ für das entsprechende Teilnetz.

# 4 Kompakte Räume

**4.1 Definition.** Eine Familie $\mathcal{U}$ von offenen Teilmengen von $X$ heißt eine ***offene Überdeckung***, falls

$$\bigcup_{U\in\mathcal{U}} U = X$$

$\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ heißt eine ***Teilüberdeckung***, falls immer noch $X \subseteq \bigcup_{V\in\mathcal{V}} V$ gilt.

**4.2 Definition.** Ein topologischer Hausdorffraum $X$ heißt ***kompakt***, wenn jede offene Überdeckung von $X$ eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

**4.3 Satz.** Sei $X$ ein Hausdorffraum. Dann sind äquivalent:

**1)** $X$ ist kompakt.

**2)** Jedes Netz in $X$ besitzt ein konvergentes Teilnetz.

**Beweis:** Sei $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ein Netz in $X$. Für $\lambda \in \Lambda$ betrachten wir $A_\lambda := \overline{\{x_{\lambda'} \mid \lambda' \geqslant \lambda\}}$ und $U_\lambda := X \setminus A_\lambda$. Wir behaupten zunächst, dass $\{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ keine endliche Teilüberdeckung besitzt.

Sei $\Lambda_0 \subseteq \Lambda$ endlich. Da $\Lambda$ gerichtet ist, gibt es $\lambda \in \Lambda$ mit $\lambda \geqslant \mu$ für alle $\mu \in \Lambda_0$. Es folgt $x_\lambda \in \{x_{\lambda'} \mid \lambda' \geqslant \mu\}$ für alle $\mu \in \Lambda_0$. Insbesondere folgt daraus $x_\lambda \in \bigcap_{\mu\in\Lambda_0} A_\mu$ und damit $x_\lambda \notin U_\mu$ für alle $\mu \in \Lambda_0$. Der Schnitt ist also nicht leer und damit die Behauptung gezeigt.

Da $X$ kompakt ist kann $\{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ keine Überdeckung von $X$ sein und es gibt $x \notin \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$. Mit anderen Worten $x \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$.

Sei $\mathcal{U}$ die Menge aller offenen Umgebungen von $x$. Wir setzen

$$\Lambda_{\mathcal{U}} := \big\{(\lambda, U) \bigm| \lambda \in \Lambda, x_\lambda \in U \in \mathcal{U}\big\}$$

Durch $(\lambda, U) \leqslant (\lambda', U') :\Leftrightarrow \lambda \leqslant \lambda'$ und $U \supseteq U'$ wird $\Lambda_{\mathcal{U}}$ zu einer gerichteten Menge: Für $(\lambda_1, U_1)$ und $(\lambda_2, U_2) \in \Lambda_{\mathcal{U}}$ betrachte $U := U_1 \cap U_2$ und wähle $\lambda \in \Lambda$ mit $\lambda \geqslant \lambda_1, \lambda_2$. Da $x \in A_\lambda = \overline{\{x_{\lambda'} \mid \lambda' \geqslant \lambda\}}$ ist und $U$ eine offene Umgebung von $x$ ist, folgt

$$U \cap \big\{x_{\lambda'} \bigm| \lambda' \geqslant \lambda\big\} \neq \emptyset$$

Also gibt es $\lambda' \geqslant \lambda$ mit $x_{\lambda'} \in U$ und es gilt $(\lambda', U) \in \Lambda_{\mathcal{U}}$ sowie $(\lambda_1, U_1), (\lambda_2, U_2) \leqslant (\lambda', U)$. Damit ist $\Lambda_{\mathcal{U}}$ gerichtet.

Sei $f\colon \Lambda_{\mathcal{U}} \to \Lambda$ definiert durch $f(\lambda, U) := \lambda$. Es gilt nun $x_{f(\lambda,U)} \to x$ für $(\lambda, U) \to \infty$. Daher ist $(x_{f(\lambda,U)})_{(\lambda,U)\in\Lambda_{\mathcal{U}}}$ das gesuchte konvergente Teilnetz.

Zur anderen Implikation: Sei $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von $X$. Angenommen $\mathcal{U}$ besitzt keine endliche Teilüberdeckung. Sei $\Lambda := \{\mathcal{U}_0 \subseteq \mathcal{U} \mid \mathcal{U}_0 \text{ ist endlich}\}$ die Menge der endlichen Teilmengen von $\mathcal{U}$. $\Lambda$ ist gerichtet bezüglich $\mathcal{U}_0 \leqslant \mathcal{U}_1 :\Leftrightarrow \mathcal{U}_0 \subseteq \mathcal{U}_1$.

Zu $\mathcal{U}_0 \in \Lambda$ wähle

$$x_{\mathcal{U}_0} \notin \bigcup_{U\in\mathcal{U}_0} U.$$

Sei nun $(x_{f(\lambda)})_{\lambda\in\Lambda'}$ mit $f\colon \Lambda' \to \Lambda$ ein konvergentes Teilnetz von $(x_{\mathcal{U}_0})_{\mathcal{U}_0\in\Lambda}$ und $x$ der Grenzwert von $(x_{f(\lambda')})_{\lambda'\in\Lambda'}$. Da $\mathcal{U}$ eine Überdeckung von $X$ ist gibt es $V \in \mathcal{U}$ mit $x \in V$. Nun gibt es $\lambda_0 \in \Lambda'$ mit $x_{f(\lambda)} \in V$ für alle $\lambda \geqslant \lambda_0$. Da $f$ kofinal ist gibt es $\lambda_1$ mit $f(\lambda_1) \geqslant \{V\} \in \Lambda$. Sei $\mu \geqslant \lambda_0, \lambda_1$ in $\Lambda'$. Dann gilt wegen $\mu \geqslant \lambda_0$

$$x_{f(\mu)} \in V$$

und andererseits, wegen $\mu \geqslant \lambda_1$

$$x_{f(\mu)} \notin \bigcup_{U \in f(\mu)} U \supset V.$$

Widerspruch. □

**4.4 Bemerkung.** Sei X ein Hausdorffraum. Eine Familie $\mathcal{A}$ von abgeschlossenen Teilmengen von X hat die ***endliche Durchschnittseigenschaft***, wenn für jedes $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}$ mit $|\mathcal{A}_0| < \infty$ gilt

$$\bigcap_{A \in \mathcal{A}_0} A \neq \emptyset.$$

Dann ist X genau dann kompakt, wenn gilt: Hat eine Familie $\mathcal{A}$ von abgeschlossenen Teilmengen von X die endliche Durchschnittseigenschaft, so gilt

$$\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A \neq \emptyset.$$

$$\{a \mid a \in A\}$$

$$\left\{a \,\middle|\, a \in A\right\}$$

$$\Big(\frac{a}{b} + 17\Big)$$

$$\left(\frac{a}{b} + 17\right)$$

**4.5 Bemerkung.** Sei X ein metrischer Raum. Dann sind äquivalent:

**(1)** X ist kompakt.

**(2)** Jede *Folge* in X besitzt eine konvergente Teil*folge*.

Topologische Räume mit der zweite Eigenschaft heißen ***folgenkompakt***.

**4.6 Bemerkung.** Man kann auch zeigen, dass sich Stetigkeit in metrischen Räumen über das Folgenkriterium charakterisieren lässt, in allgemeinen topologischen Räumen muss man stattdessen aber Netze benutzen. Bei der Verallgemeinerung von metrischen Räumen hin zu topologischen Räumen, müssen also auch Folgen zu Netzen verallgemeinert werden.

**4.7 Satz** (Tychonov). Sei $(X_i)_{i \in I}$ eine Familie von kompakten topologischen Räumen. Dann ist auch $X := \prod_{i \in I} X_i$ kompakt.

**4.8 Bemerkung.** Seien $(X_i, d_i)_{i \in \mathbb{N}}$ folgenkompakte topologische Räume. Dann ist auch $\prod_i X_i$ folgenkompakt:
Sei $p_j \colon \prod_i X_i \to X_j$ die Projektion auf den j-ten Faktor. Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\prod_i X_i$. Wähle induktiv $\mathbb{N} = N_0 \supseteq N_1 \supseteq N_2 \supseteq \ldots$ mit

**(i)** $|N_i| = \infty$

**(ii)** $(p_i(x_n))_{n \in N_i}$ ist eine konvergente Folge in $X_i$.

Dies ist möglich, da $X_i$ kompakt ist. Wähle nun $n_k \in N_k$ induktiv, so dass $n_k > n_{k-1}$. Dann ist $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Für $i \in \mathbb{N}$ ist $\big(p_i(x_{n_k})\big)_{k\in\mathbb{N},k\geqslant i}$ eine Teilfolge der konvergenten Folge $(p_i(x_n))_{n\in N_i}$ und daher konvergent. Damit konvergiert auch $(p_i(x_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ für jedes $i$. Daher konvergiert $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ punktweise, also in der Produkttopologie (Übung).

**4.9 Definition.** Sei $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ein Netz in $X$ und $A \subseteq X$. Wir sagen $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ist ***immer wieder in*** $A$, falls gilt:

$$\forall\lambda \in \Lambda : \exists\mu \in \Lambda \text{ mit } \mu \geqslant \lambda \text{ und } x_\mu \in A$$

Wir sagen $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ist ***schließlich in*** $A$, falls gilt

$$\exists\lambda \in \Lambda : \forall\mu \in \Lambda \text{ mit } \mu \geqslant \lambda \text{ gilt } x_\mu \in A$$

Offensichtlich gilt: $x_\lambda \longrightarrow x \iff$ für jede Umgebung $U$ von $x$ ist $x_\lambda$ schließlich in $U$.

**4.10 Definition.** Ein Netz $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ in $X$ heißt ***universell***, falls für jede Teilmenge $A \subseteq X$ gilt: Entweder ist $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ schließlich in $A$ *oder* schließlich in $X \setminus A$.

**4.11 Bemerkung.**

- Ist $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ universell und immer wieder in $A$, dann ist $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ schließlich in $A$.
- Ist $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ein universelles Netz in $X$ und $f\colon X \to Y$ eine Abbildung, so ist auch $(f(x_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ ein universelles Netz in $Y$.

**4.12 Lemma.** Ist $X$ kompakt und $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ein universelles Netz in $X$, so konvergiert $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ in $X$.

**Beweis:** Sei $X$ kompakt und $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ein universelles Netz in $X$. Angenommen $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ konvergiert nicht in $X$. Dann gibt es zu jedem $x \in X$ eine offene Umgebung $U_x$ von $x$, so dass $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ nicht schließlich in $U_x$ ist. Da $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ universell ist, ist $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ schließlich in $X \setminus U_x$. Da $X = \bigcup_{x\in X} U_x$ und $X$ kompakt ist, gibt es $x_1, \ldots, x_k \in X$ mit $X = U_{x_1} \cup \ldots \cup U_{x_k}$. Für jedes $i \in \{1, \ldots, k\}$ sei $\lambda_i \in \Lambda$ mit $x_\mu \in X \setminus U_{x_i}$ für $\mu \geqslant \lambda_i$. Sei nun $\mu \in \Lambda$ mit $\mu \geqslant \lambda_i$ für $i = 1, \ldots, k$. Es folgt

$$x_\mu \in \bigcap_{i=1}^{k}(X \setminus U_{x_i}) = X \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{k} U_{x_i}\right) = X \setminus X = \emptyset \ \lightning \qquad \square$$

**4.13 Proposition.** Jedes Netz besitzt ein universelles Teilnetz.

**Beweis:** Sei $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ein Netz in $X$. Sei

$$\mathfrak{M} := \left\{ \mathfrak{B} \subseteq \mathcal{P}(X) \;\middle|\; \begin{array}{ll} (1) & B \in \mathfrak{B} \Rightarrow (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \text{ ist immer wieder in } B \\ (2) & B, B' \in \mathfrak{B} \Rightarrow B \cap B' \in \mathfrak{B} \end{array} \right\}$$

Dann ist $\{X\} \in \mathfrak{M}$, insbesondere gilt $\mathfrak{M} \neq \emptyset$. Ist $\mathfrak{M}_0 \subseteq \mathfrak{M}$ eine Kette, also

$$\mathfrak{B}, \mathfrak{B}' \in \mathfrak{M}_0 \implies \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{B}' \text{ oder } \mathfrak{B}' \subseteq \mathfrak{B}$$

so gilt $\bigcup_{\mathfrak{B}\in\mathfrak{M}_0} \mathfrak{B} \in \mathfrak{M}$. Nach dem Lemma von Zorn enthält $\mathfrak{M}$ ein maximales Element $\mathfrak{B}$. Da $\mathfrak{B}$ maximal ist, ist $\{X\} \in \mathfrak{B}$. Sei

$$\Lambda' := \big\{(B, \lambda) \;\big|\; B \in \mathfrak{B}, \lambda \in \Lambda, x_\lambda \in B\big\}$$

Durch $(B, \lambda) \leqslant (B', \lambda') :\Leftrightarrow B \supseteq B', \lambda \leqslant \lambda'$ wird $\Lambda'$ gerichtet. Wir zeigen nun, dass $(x_\lambda)_{(B,\lambda)\in\Lambda'}$ universell ist. Dazu zunächst ein Hilfssatz:

Sei $(x_\lambda)_{(B,\lambda)\in\Lambda'}$ immer wieder in S. Dann gilt $S \in \mathfrak{B}$.

*Beweis:* Wir zeigen: $\mathfrak{B}^+ := \mathfrak{B} \cup \{S \cap B \mid B \in \mathfrak{B}\} \in \mathfrak{M}$. Da $\mathfrak{B}$ maximal ist und $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{B}^+$, folgt dann $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}^+$ und $S \in \mathfrak{B}^+ = \mathfrak{B}$. Offenbar erfüllt $\mathfrak{B}^+$ Bedingung (2); es bleibt also (1) zu zeigen.

Wir müssen zeigen, dass für alle $B \in \mathfrak{B}$ das Netz $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ immer wieder in $B \cap S$ ist. Sei also $\lambda \in \Lambda$ beliebig. Gesucht ist nun $\mu \geqslant \lambda$ mit $x_\mu \in B \cap S$. Da $B \in \mathfrak{B} \in \mathfrak{M}$ gibt es $\lambda' \in \Lambda$, $\lambda' \geqslant \lambda$ mit $x_{\lambda'} \in B$. Also ist $(B, \lambda') \in \Lambda'$. Da $(x_\lambda)_{(B,\lambda)\in\Lambda'}$ immer wieder in S ist, gibt es

$$\Lambda' \ni (A, \mu) \geqslant (B, \lambda')$$

mit $x_\mu \in S$. Da $(A, \mu) \in \Lambda'$ ist $x_\mu \in A \subseteq B$. Also $x_\mu \in B \cap S$, was zu zeigen war. □

Sei $S \subseteq X$ beliebig. Ist $(x_\lambda)_{(B,\lambda)\in\Lambda'}$ weder schließlich in S noch schließlich in $X \setminus S$, so ist $(x_\lambda)_{(B,\lambda)\in\Lambda'}$ immer wieder in S und immer wieder in $X \setminus S$. Mit dem Hilfssatz folgt nun, dass $S, X \setminus S \in \mathfrak{B}$. Dann gilt aber $\emptyset = S \cap (X \setminus S) \in \mathfrak{B}$. ↯ □

**Beweis** (des Satzes von Tychonov): Ist $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ein Netz in $\prod_i X_i$, so besitzt dieses Netz ein universelles Teilnetz $(x_{f(\mu)})_{\mu\in\Lambda'}$ nach Proposition 4.13. Für jedes i ist dann $p_i(x_{f(\mu)})_{\mu\in\Lambda'}$ ein universelles Netz in $X_i$ und nach Lemma 4.12 konvergent. Daher ist $(x_{f(\mu)})_{\mu\in\Lambda'}$ bezüglich der Produkttopologie konvergent. □

**4.14 Definition.** Sei $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller beschränkten Abbildungen $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$. Die ***Supremumsnorm***

$$\|f\|_\infty := \sup\{|f(n)| \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

ist eine Norm auf $\ell^\infty(\mathbb{Z})$.

**4.15 Satz.** Es gibt eine Abbildung $M\colon \ell^\infty(\mathbb{Z}) \to \mathbb{R}$ mit

- **a)** M ist $\mathbb{R}$-linear,
- **b)** M ist positiv, d.h. $f \geqslant 0 \implies M(f) \geqslant 0$,
- **c)** $M(\mathbb{1}) = 1$ für die konstante 1-Funktion $\mathbb{1}\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$,
- **d)** M ist $\mathbb{Z}$-invariant: Für $f \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$ sei $Tf \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$ gegeben durch $(Tf)(n) = f(n+1)$. Dann gilt $M(f) = M(Tf)$.

**Beweis:** Sei $\mathfrak{M}$ die Menge aller Abbildungen $M\colon \ell^\infty(\mathbb{Z}) \to \mathbb{R}$, die die Punkte a), b) und c) erfüllen. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $M_n \in \mathfrak{M}$ definiert durch $M_n(f) = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^n f(i)$. Dann gilt für $f \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$

$$M_n(f) - M_n(Tf) = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^n f(i) - Tf(i) = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^n \big(f(i) - f(i+1)\big) = \frac{1}{n+1}\big(f(0) - f(n+1)\big)$$

Es folgt $\big|M_n(f) - M_n(Tf)\big| \leqslant \frac{2\cdot\|f\|_\infty}{n+1}$. Wir konstruieren nun eine kompakte Topologie auf $\mathfrak{M}$, denn dann können wir anschließend ein konvergentes Teilnetz der Folge $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ betrachten. Sei

$$X := \prod_{f\in\ell^\infty(\mathbb{Z})} \big[-\|f\|_\infty, \|f\|_\infty\big]$$

Aus a), b), c) folgt, dass für $f \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$ und $M \in \mathfrak{M}$ gilt: $M(f) \in \big[-\|f\|_\infty, \|f\|_\infty\big]$. Mittels

$$\mathfrak{M} \ni M \longmapsto \big(M(f)\big)_{f\in\ell^\infty(\mathbb{Z})} \in X$$

wird $\mathfrak{M}$ zu einem abgeschlossenen Unterraum von X. $\mathfrak{M}$ ist kompakt bezüglich der Produkttopologie auf X, also bezüglich punktweiser Konvergenz. Sei nun $\alpha\colon \Lambda \to \mathbb{N}$, sodass $M_{\alpha(\lambda)} \longrightarrow M \in \mathfrak{M}$ (existiert, da $\mathfrak{M}$ kompakt). Es folgt

$$\forall f \in \ell^\infty(\mathbb{Z}) : M_{\alpha(\lambda)}(f) \longrightarrow M(f)$$

Wegen $M_{\alpha(\lambda)}(f) - M_{\alpha(\lambda)}(Tf) \xrightarrow{\lambda\to\infty} M(f) - M(Tf)$ und

$$\left|M_{\alpha(\lambda)}(f) - M_{\alpha(\lambda)}(Tf)\right| \leqslant \frac{2\cdot\|f\|}{\alpha(\lambda)+1} \xrightarrow{\alpha(\lambda)\to\infty} 0$$

folgt $M(f) = M(Tf)$ für alle $f \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$. □

**4.16 Definition.** Sei X eine Menge. Ein ***Filter*** auf X ist eine Familie $\mathcal{F}$ von Teilmengen von X die folgenden Bedingungen erfüllt:

**a)** ist $A \in \mathcal{F}$ und $A \subseteq B$ so gilt auch $B \in \mathcal{F}$;

**b)** sind $A, B \in \mathcal{F}$ so gilt $A \cap B \in \mathcal{F}$;

**c)** $X \in \mathcal{F}$, $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

Ein ***Ultrafilter*** ist ein Filter $\mathcal{F}$ der maximal bezüglich Inklusion ist. (Mit anderen Worten ist $\mathcal{F}'$ ein Filter der $\mathcal{F}$ enthält, so ist $F = F'$.) Zu $x \in X$ heißt $\mathcal{F}_x := \{A \subseteq X \mid x \in A\}$ der ***Hauptfilter*** zu x.

**4.17 Bemerkung.** **a)** Ein Filter $\mathcal{F}$ ist genau dann ein Ultrafilter, falls für jede Teilmenge $A \subseteq X$ entweder $A \in \mathcal{F}$ oder $X \setminus A \in \mathcal{F}$ ist.

**b)** Hauptfilter sind Ultrafilter.

**c)** Zur Konstruktion von Ultrafiltern die keine Hauptfilter sind wird das Zornsche Lemma benötigt.

**4.18 Definition.** Sei X ein topologischer Raum. Wir sagen ein Filter $\mathcal{F}$ auf X *konvergiert* gegen $x \in X$ falls er den ***Umgebungsfilter*** von x

$$\mathcal{U}_x := \left\{U \subseteq X \,\middle|\, U \text{ ist Umgebung von } x\right\}$$

enthält.

**4.19 Bemerkung.** Ein Hausdorffraum X ist genau dann kompakt wenn jeder Ultrafilter auf X konvergiert. Diese Charakterisierung von Kompaktheit kann man zu einem weiteren Beweis des Satzes von Tychonov benutzen. Diesen Beweis werden wir in den Übungen behandeln.

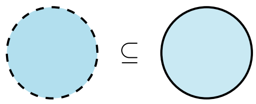
# 5 Kompaktifizierungen

**5.1 Definition.** Sei $X$ ein topologischer Raum. Ein kompakter Raum $\overline{X}$ heißt eine ***Kompaktifizierung*** von $X$, falls er $X$ als offenen, dichten Unterraum enthält. (Oft heißt $\partial X := \overline{X} \setminus X$ der Rand der Kompaktifizierung.)

**5.2 Beispiel.** Beispiele für Kompaktifizierungen:

**(i)** $(-1, 1) \subseteq [-1, 1]$

**(ii)** $\mathring{D}^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 < 1\} \subseteq D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 \leqslant 1\}$. Für $n = 2$ sieht das wie folgt aus:



Es gilt $\partial D^n = S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 = 1\}$.

**(iii)** $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathring{D}^n$, $f(x) := \frac{x}{1+\|x\|_2}$ ist ein Homöomorphismus. Daher können wir $\mathbb{R}^n$ zu

$$\overline{\mathbb{R}^n} := \mathbb{R}^n \,\dot\cup \big(S^{n-1} \times \{\infty\}\big) \cong D^n$$

kompaktifizieren.

**(iv)** Definiere auf $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ folgende Topologie

$$\mathcal{O} := \{U \mid U \subseteq \mathbb{R}^n \text{ ist offen}\} \cup \{U \cup \{\infty\} \mid U \subseteq \mathbb{R}^n \text{ offen und } \exists R > 0 : \mathbb{R}^n \setminus B_R(0) \subseteq U\}$$

Dann ist $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ eine weitere Kompaktifizierung von $\mathbb{R}^n$. Übung: $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\} \cong S^n$.

**5.3 Definition.** Ein topologischer Raum $X$ heißt ***lokalkompakt***, wenn für jedes $x \in X$ und jede offene Umgebung $U$ von $x$ eine kompakte Umgebung $K$ von $x$ existiert mit $K \subseteq U$.

**5.4 Beispiel.** **(i)** $\mathbb{R}^n$ ist lokalkompakt: Sei $x \in \mathbb{R}^n$ und $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung von $x$. Da $U$ offen ist existiert $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subseteq U$. Es folgt $\overline{B}_{\varepsilon/2}(x) \subseteq B_\varepsilon(x) \subseteq U$. Dann ist $\overline{B}_{\varepsilon/2}(x)$ eine kompakte Umgebung von $x$, die in $U$ liegt.

**(ii)** Topologische Mannigfaltigkeiten sind lokalkompakt, da sie lokal homöomorph zum $\mathbb{R}^n$ sind.

**(iii)** Offene Teilräume von lokalkompakten Räumen sind lokalkompakt.

**5.5 Proposition.** Sei $K$ kompakt und $W \subseteq K$ offen. Dann ist $W$ lokalkompakt. Insbesondere sind kompakte Räume auch lokalkompakt.

**Beweis:** Sei $x \in W$ und $U$ eine offene Umgebung von $x$ in $W$. $K$ ist Hausdorff, also gibt es für alle $y \in K \setminus U$ offene Umgebungen $V_y$ von $y$ und $W_y$ von $x$ mit $V_y \cap W_y = \emptyset$. Dann ist $\{V_y \mid y \in K \setminus U\}$ eine offene Überdeckung von $K \setminus U$. Da mit $K$ auch $K \setminus U$ kompakt ist, gibt es $Y_0 \subseteq K \setminus U$ endlich mit

$$K \setminus U \subseteq \bigcup_{y \in Y_0} V_y.$$

Nun ist $L := K \setminus \bigcup_{y \in Y_0} V_y$ kompakt und $L \subseteq U$. Da $\left(\bigcap_{y \in Y_0} W_y\right) \cap U$ offen ist und $\left(\bigcap_{y \in Y_0} W_y\right) \cap U \subseteq L$ ist, ist $L$ eine Umgebung von $x$. $\square$

**5.6 Bemerkung.** Wegen obiger Proposition können nur lokalkompakte Räume eine Kompaktifizierung besitzen.

**5.7 Definition.** Sei $X$ ein lokalkompakter Hausdorffraum. Die ***Einpunktkompaktifizierung,*** EPK (EPK) von $X$ ist $\mathrm{EPK}(X) := X \cup \{\infty\}$ mit der folgenden Topologie:

$$U \subseteq X \cup \{\infty\} \text{ offen } :\Longleftrightarrow U \subseteq X \text{ ist offen oder } U = (X \setminus K) \cup \{\infty\} \text{ mit } K \subseteq X \text{ kompakt}$$

**5.8 Proposition.** $\mathrm{EPK}(X)$ ist kompakt. Ist $X$ nicht kompakt, so ist $\mathrm{EPK}(X)$ eine Kompaktifizierung von $X$.

**Beweis:** Sei $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von $\mathrm{EPK}(X)$. Sei $U_0 \in \mathcal{U}$ mit $\infty \in U_0$. Dann existiert $K \subseteq X$ kompakt mit $U_0 = (X \setminus K) \cup \{\infty\}$. Da $K$ kompakt ist, gibt es $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{U}$ mit $K \subseteq U_1 \cup \ldots \cup U_n$. Dann ist $U_0, U_1, \ldots, U_n$ eine endliche Teilüberdeckung von $\mathrm{EPK}(X)$.

Es bleibt zu zeigen, dass $\mathrm{EPK}(X)$ Hausdorff ist. Seien dazu $x, y \in \mathrm{EPK}(X)$ mit $x \neq y$. Gilt $x \neq \infty \neq y$ so gibt es $U, V \subseteq X$ mit $x \in U, y \in V$ und $U \cap V = \emptyset$, da $X$ hausdorffsch ist. Nach Definition sind dann $U, V$ auch offen in $\mathrm{EPK}(X)$. Andernfalls sei o.B.d.A. $x = \infty$. Da $X$ lokalkompakt ist, gibt es eine Umgebung $K$ von $y$ mit $K \subseteq X$ kompakt. Dann sind $U := \mathring{K}$ und $V := (X \setminus K) \cup \{\infty\}$ disjunkte offene Umgebungen von $x$ und $y$.

Sei nun $X$ nicht kompakt. Ist $U$ eine Umgebung von $\infty \in \mathrm{EPK}(X)$, so gibt es $K \subseteq X$ kompakt mit $U = (X \setminus K) \cup \{\infty\}$. Dann ist $U \cap X = X \setminus K$. Da $X$ nicht kompakt ist, ist $X \neq K$, also $X \setminus K \neq \emptyset$. Daher hat jede Umgebung von $\infty \in \mathrm{EPK}(X)$ einen nicht-trivialen Schnitt mit $X$. Also ist $X \subseteq \mathrm{EPK}(X)$ dicht. □

**Frage.** Sei $f\colon X \to Y$ stetig und $X, Y$ lokalkompakt. Gibt es dann eine stetige Fortsetzung

$$\bar{f}\colon \mathrm{EPK}(X) \to \mathrm{EPK}(Y)$$

mit $\bar{f}(\infty) = \infty$?

**5.9 Beispiel.** **(i)** Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) \equiv 0$. Dann ist $\bar{f}\colon \mathrm{EPK}(\mathbb{R}) \to \mathrm{EPK}(\mathbb{R})$ mit

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) = 0, & \text{falls } x \in \mathbb{R} \\ \infty, & \text{falls } x = \infty \end{cases}$$

sicher nicht stetig. Natürlich ist aber $\tilde{f}\colon \mathrm{EPK}(\mathbb{R}) \to \mathrm{EPK}(\mathbb{R})$ mit $\tilde{f}(x) = 0 \,\forall x \in \mathrm{EPK}(\mathbb{R})$ stetig.

**(ii)** Betrachte $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \geqslant 1 \\ x, & \text{falls } x \in [0,1] \\ 0, & \text{falls } x \leqslant 0 \end{cases}$$

Dann gibt es keine stetige Fortsetzung $\bar{f}\colon \mathrm{EPK}(\mathbb{R}) \to \mathrm{EPK}(\mathbb{R})$, denn die Folge $x_n = n$ konvergiert in $\mathrm{EPK}(\mathbb{R})$ gegen $\infty$. Da $f(x_n) = 1 \;\forall n$ müsste $\bar{f}(\infty) = 1$ sein. Die Folge $y_n = -n$ konvergiert in $\mathrm{EPK}(\mathbb{R})$ auch gegen $\infty$. Da $f(y_n) = 0$ für alle $n$ müsste auch $\bar{f}(\infty) = 0$ sein. $\lightning$

**5.10 Definition.** Seien $X$ und $Y$ lokalkompakt. Eine stetige Abbildung $f\colon X \to Y$ heißt ***eigentlich,*** wenn für jede kompakte Teilmenge $K \subseteq Y$ auch $f^{-1}(K) \subseteq X$ kompakt ist.

**5.11 Satz.** Seien $X, Y$ lokalkompakt und $f\colon X \to Y$ stetig. Dann sind äquivalent:

**(1)** $f$ ist eigentlich.

**(2)** $\bar{f}\colon \mathrm{EPK}(X) \to \mathrm{EPK}(Y)$ mit $\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{falls } x \in X \\ \infty, & \text{falls } x = \infty \end{cases}$ ist stetig.

**Beweis:** Wir nehmen zunächst an, dass $f$ eigentlich ist. Sei $U \subseteq \mathrm{EPK}(Y)$ offen. Ist $\infty \notin U$, so ist $\bar{f}^{-1}(U) = f^{-1}(U)$ offen, da $f$ stetig ist. Ist $\infty \in U$, so gibt es $K \subseteq Y$ mit $U = (X \setminus K) \cup \{\infty\}$. Da $f$ eigentlich ist, ist auch $L := f^{-1}(K) \subseteq X$ kompakt und $\bar{f}^{-1}(U) = (X \setminus L) \cup \{\infty\}$ ist offen in $\mathrm{EPK}(X)$.

Für die andere Implikation betrachten wir $K \subseteq Y$ kompakt. Dann ist $U = (Y \setminus K) \cup \{\infty\} \subseteq Y$ offen. Da $\bar{f}$ stetig ist, ist auch $\bar{f}^{-1}(U) = \big(X \setminus f^{-1}(K)\big) \cup \{\infty\}$ offen. Damit ist $f^{-1}(K) \subseteq X$ kompakt. $\square$

# 6 Der Approximationssatz von Stone-Weierstraß

**6.1 Definition.** Sei $X$ ein lokalkompakter Hausdorffraum. Eine stetige Funktion $f\colon X \to \mathbb{R}$ ***verschwindet im Unendlichen***, falls für jedes $\varepsilon > 0$

$$K_\varepsilon := \{x \in X \mid |f(x)| \geqslant \varepsilon\}$$

kompakt ist. Die ***Algebra*** aller solchen Funktionen bezeichnen wir mit $C_0(X)$. Durch

$$\|f\|_\infty := \sup_{x\in X} |f(x)| = \max_{x\in X} |f(x)|$$

für $f \in C_0(X)$ erhalten wir eine Norm auf $C_0(X)$.

**6.2 Bemerkung.** Eine Abbildung $f\colon X \to \mathbb{R}$ liegt genau dann in $C_0(X)$, wenn wenn $\bar{f}\colon \operatorname{EPK}(X) \to \mathbb{R}$ mit

$$\bar{f}(x) := \begin{cases} f(x) & x \in X \\ 0 & x = \infty \end{cases}$$

stetig ist.

**6.3 Definition.** Sei $\mathcal{B} \subseteq C_0(X)$. Wir sagen, dass $\mathcal{B}$ die Punkte von $X$ ***streng trennt***, falls es zu $x, y \in X$ mit $x \neq y$ ein $f \in \mathcal{B}$ gibt mit $0 \neq f(x) \neq f(y) \neq 0$.

**6.4 Bemerkung.** Sei $\mathcal{A} \subseteq C_0(X)$ eine Unteralgebra. Gilt

**a)** $\forall x, y \in X : \exists f \in \mathcal{A} : f(x) \neq f(y)$ und

**b)** $\forall x \in X : \exists g \in \mathcal{A} : g(x) \neq 0$

so trennt $\mathcal{A}$ die Punkte von $X$ streng:

Sei $x \neq y \in X$. Sei $f \in \mathcal{A}$ mit $f(x) \neq f(y)$. Dann ist mindestens einer der zwei Funktionswerte $f(x)$ und $f(y)$ verschieden von Null. Sind beide $\neq 0$, so ist nichts mehr zu zeigen. Sei also o.B.d.A. $f(x) = 0$ und $f(y) \neq 0$. Wähle $g \in \mathcal{A}$ mit $g(x) \neq 0$. Für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-g(y)/f(y), (g(x) - g(y))/f(y)\}$ gilt dann

$$0 \neq \alpha f(x) + g(x) \neq \alpha f(y) + g(y) \neq 0.$$

**6.5 Beispiel.** Die Unteralgebra der reellen Polynome $\mathcal{A} := \{x \mapsto p(x) \mid p \in R[t]\} \subseteq C_0([a, b])$ trennt die Punkte von $[a, b]$ streng.

**6.6 Satz** (Stone-Weierstrass)**.** Sei $X$ ein lokalkompakter Hausdorff-Raum und sei $\mathcal{A} \subseteq C_0(X)$ eine Unteralgebra, die die Punkte von $X$ streng trennt. Dann ist $\mathcal{A} \subseteq C_0(X)$ dicht bezüglich $\|.\|_\infty$.

**6.7 Satz** (Dini)**.** Sei $(f_n\colon [0, 1] \to \mathbb{R})_{n\in\mathbb{N}}$ eine punktweise monoton wachsende Folge stetiger Funktionen, die punktweise gegen eine stetige Funktion $f$ konvergiert. Dann konvergiert $f_n \longrightarrow f$ gleichmäßig, d.h. $\|f_n - f\|_\infty \longrightarrow 0$.

**Beweis:** Sei $\varepsilon > 0$. Zu jedem $t \in [0, 1]$ gibt es $n_t$ mit

$$\forall n \geqslant n_t : f(t) \geqslant f_n(t) \geqslant f_{n_t}(t) \geqslant f(t) - \varepsilon.$$

Da $f$ und $f_{n_t}$ stetig sind, ist $U_t := \{s \in [0, 1] \mid f(s) - f_{n_t}(s) < \varepsilon\}$ offen. Da $[0, 1]$ kompakt ist, gibt es $t_0, \ldots, t_k \in [0, 1]$ mit $[0, 1] = U_{t_0} \cup \ldots \cup U_{t_k}$.. Für alle $n \geqslant \max\{n_{t_0}, \ldots, n_{t_k}\}$ folgt dann $\|f_n - f\|_\infty \leqslant \varepsilon$. $\square$

**6.8 Lemma.** Sei $g(t) = \sqrt{t}$ für $t \in [0,1]$. Es gibt eine Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von reellen Polynomen so dass $p_n \to g$ gleichmäßig auf $[0,1]$ und $p_n(0) = 0$.

**Beweis:** Sei $p_0 \equiv 0$ und für $n > 0$

$$p_{n+1}(t) \coloneqq p_n(t) - \frac{1}{2}\cdot\left(p_n(t)^2 - t\right)$$

Dann gilt $p_n(0) = 0$. Per Induktion nach $n$ zeigen wir, dass $0 \leqslant p_n(t) \leqslant \sqrt{t}$ für alle $t \in [0,1]$ gilt:
Für $n = 0$ ist die Behauptung offensichtlich erfüllt. Für den Induktionsschritt $n \mapsto n+1$ betrachte

$$\begin{aligned} p_{n+1}(t) - \sqrt{t} = p_n(t) - \sqrt{t} - \frac{1}{2}\Big(p_n(t)^2 - t\Big) &= \Big(p_n(t) - \sqrt{t}\Big) - \frac{1}{2}\Big(p_n(t) - \sqrt{t}\Big)\Big(p_n(t) + \sqrt{t}\Big) \\ &= \underbrace{\Big(p_n(t) - \sqrt{t}\Big)}_{\leqslant 0}\underbrace{\Bigg(1 - \frac{1}{2}\underbrace{\big(p_n(t) + \sqrt{t}\big)}_{\text{IV.: }\leqslant 2\sqrt{t}}\Bigg)}_{\geqslant 0} \end{aligned}$$

Also gilt $p_{n+1}(t) - \sqrt{t} \leqslant 0$ wie behauptet. Weiter gilt, dass $p_n(t)$ monoton wachsend ist für jedes $t$. Wegen $p_n(t) \leqslant \sqrt{t}$ existiert $\lim_{n\to\infty} p_n(t)$ für $t \in [0,1]$. Es folgt

$$\begin{aligned} 0 = \lim_{n\to\infty} p_{n+1}(t) - \lim_{n\to\infty} p_n(t) = \lim_{n\to\infty}\big(p_{n+1}(t) - p_n(t)\big) &= \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{2}\Big(p_n(t)^2 - t\Big) \\ &= -\frac{1}{2}\left(\Big(\lim_{n\to\infty} p_n(t)\Big)^2 - t\right) \end{aligned}$$

Also gilt $\lim_{n\to\infty} p_n(t) = \sqrt{t}$. Mit dem Satz von Dini (6.7) folgt, dass $p_n$ gleichmäßig gegen $g$ konvergiert. □

**6.9 Bemerkung.** Sei $\mathcal{A} \subseteq C_0(X)$ eine Algebra. Ist $p \in \mathbb{R}[t]$ ein Polynom mit $p(0) = 0$ und $f \in \mathcal{A}$, so liegt auch $p \circ f \in \mathcal{A}$: Sei dazu $p = \sum_{i=1}^n a_i t^i$, dann gilt

$$p\big(f(t)\big) = \sum_{i=1}^n a_i f(t)^i = \left(\sum_{i=1}^n a_i f^i\right)(t) \in \mathcal{A}.$$

**6.10 Lemma.** Sei $X$ ein lokalkompakter Hausdorffraum und $\mathcal{A} \subseteq C_0(X)$ eine Unteralgebra. Sei $\bar{\mathcal{A}} :=$ der Abschluss von $\mathcal{A}$ bezüglich $\|.\|$. Dann gilt: $f \in \mathcal{A} \implies |f| \in \overline{\mathcal{A}}$.

**Beweis:** Sei $f \in \mathcal{A}$. O.B.d.A. sei $f(X) \subseteq [-1,1]$. Dann ist $f(x)^2 \in [0,1]$ für alle $x \in X$. Sei $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge von Polynomen aus Lemma 6.8. Dann gilt

$$\left|p_n\big(f(x)^2\big) - \sqrt{f(x)^2}\right| = \Big|p_n\big(f(x)^2\big) - \big|f(x)\big|\Big| \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

gleichmäßig in $x \in X$. Es folgt $\big\|p_n(f^2) - |f|\big\|_\infty \longrightarrow 0$. Wegen $f \in \mathcal{A}$ gilt $f^2 \in \mathcal{A}$ und nach Bemerkung 6.9 auch $p_n(f^2) \in \mathcal{A}$. Also folgt $|f| \in \overline{\mathcal{A}}$. □

**6.11 Bemerkung.** Für zwei Funktionen $f, g \in \mathcal{A}$ gilt

$$\max(f,g) = \frac{1}{2}\Big(f + g + |f-g|\Big) \in \overline{\mathcal{A}} \quad \text{und} \quad \min(f,g) = \frac{1}{2}\Big(f + g - |f-g|\Big) \in \overline{\mathcal{A}}$$

Wegen $\overline{\mathcal{A}} = \overline{\overline{\mathcal{A}}}$ gilt auch $f, g \in \overline{\mathcal{A}} \implies \min(f,g), \max(f,g) \in \overline{\mathcal{A}}$.

**6.12 Lemma.** Sei $X$ ein lokalkompakter Hausdorffraum und $\mathcal{A} \subseteq C_0(X)$ eine Unteralgebra, die die Punkte von $X$ streng trennt. Zu $x, y \in X$, $x \neq y$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gibt es dann $f \in \mathcal{A}$ mit $f(x) = \alpha, f(y) = \beta$.

**Beweis:** Es gibt $g \in \mathcal{A}$ mit $0 \neq g(x) \neq g(y) \neq 0$. Ansatz: Für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ betrachte $f \coloneqq \lambda g + \mu g^2$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \alpha \\ f(y) &= \beta \end{aligned} \iff \begin{aligned} g(x)\lambda + g(x)^2\mu &= \alpha \\ g(y)\lambda + g(y)^2\mu &= \beta \end{aligned}$$

Da

$$\det \begin{pmatrix} g(x) & g(x)^2 \\ g(y) & g(y)^2 \end{pmatrix} = g(x)g(y)^2 - g(y)g(x)^2 = g(x)g(y)\big(g(y) - g(x)\big) \neq 0$$

gibt es $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, sodass das Gleichungssystem eine Lösung hat. □

**Beweis** (von Satz 6.6)**:** Seien $h \in C_0(X)$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir müssen zeigen, dass ein $f \in \overline{\mathcal{A}}$ existiert mit $\|f - h\|_\infty < \varepsilon$, da $\overline{\overline{\mathcal{A}}} = \overline{\mathcal{A}}$ gilt.

**Schritt 1:** Wir konstruieren für $y \in X$ eine Funktion $f_y \in \overline{\mathcal{A}}$ mit $f_y(y) = h(y)$ und $f_y(z) \geqslant h(z) - \varepsilon$ für alle $z \in X$.

Zu $x \in K$ gibt es nach Lemma 6.12 $g_x \in \mathcal{A}$ mit

$$g_x(y) = h(y) \quad \text{und} \quad g_x(x) = h(x)$$

Sei $U_x \coloneqq \{z \in X \mid g_x(z) > h(z) - \varepsilon\}$. Da $g_x$ und $h$ stetig sind, ist $U_x$ offen. Da $g_x$ und $h$ in $\infty$ verschwinden ist $X \setminus U_x$ kompakt. Folglich gibt es $x_1, \ldots, x_n$ mit $X = U_{x_1} \cup \ldots \cup U_{x_n}$. Nun ist $f_y \coloneqq \max\{g_{x_1}, \ldots, g_{x_n}\}$ die gesuchte Funktion. Wegen Lemma 6.10 bzw. Bemerkung 6.11 gilt $f_y \in \overline{\mathcal{A}}$.

**Schritt 2:** Konstruktion von $f$: Zu $y \in X$ sei $V_y \coloneqq \{z \in X \mid f_y(z) < h(z) + \varepsilon\}$. Wieder ist $V_y$ offen, $X \setminus V_y$ kompakt und $y \in V_y$. Also gibt es wieder $y_1, \ldots, y_l$ mit $X = V_{y_1} \cup \ldots \cup V_{y_n}$. Für die Funktion $f \coloneqq \min\{f_{y_1}, \ldots, f_{y_l}\}$ gilt dann

$$h(z) - f(z) = \max_i h(z) - f_{y_i}(z) < \varepsilon$$

da $f_{y_i}(z) \geqslant h(z) - \varepsilon \Rightarrow h(z) - f_{y_i}(z) \leqslant \varepsilon$ nach obiger Konstruktion für jedes $i$ gilt. Weiter gilt

$$f(z) - h(z) = \min_i f_{y_i}(z) - h(z) < \varepsilon$$

nach Definition der $V_{y_i}$. Also gilt insgesamt $\|f - h\| < \varepsilon$.

□

# 7 Metrisierbarkeit

**7.1 Definition.** Ein topologischer Raum $X$ heißt ***metrisierbar***, wenn es eine Metrik auf $X$ gibt, so dass die von der Metrik induzierte Topologie die Topologie von $X$ ist.

**7.2 Bemerkung.** Ist $X$ metrisierbar, so gibt es für jedes $x \in X$ eine abzählbare Umgebungsbasis $\mathcal{U}_x$ bei $x$, also eine abzählbare Menge von offenen Umgebungen von $x$, sodass jede Umgebung von $x$ eine Menge aus $\mathcal{U}_x$ enthält.

**7.3 Definition.** Ein topologischer Hausdorffraum $X$ heißt ***normal***, wenn er die folgende Trennungseigenschaft hat: Sind $A, B \subseteq X$ abgeschlossen mit $A \cap B = \emptyset$, so gibt es $U, V \subseteq X$ offen mit $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ mit $U \cap V = \emptyset$.

**7.4 Bemerkung.** Metrisierbare Räume sind normal. (Übung.)

**7.5 Satz** (Urysohn). Sei $X$ ein normaler Raum, der das zweite Abzählbarkeitsaxiom (1.14) erfüllt . Dann ist $X$ metrisierbar.

**Beweis** (mit Urysohn's Lemma, 7.6)**:** Sei $\mathcal{U}$ eine abzählbare Basis der Topologie von $X$. Da $X$ normal ist, gibt es zu jedem Paar $U, V \in \mathcal{U}$ mit $\overline{U} \subseteq V$ (also $\overline{U} \cap X \setminus V = \emptyset$) nach Urysohn's Lemma (7.6) eine stetige Funktion $f_{U,V}\colon X \to [0,1]$ mit $f_{U,V}(x) = 0$ für $x \in \overline{U}$ und $f_{U,V}(y) = 1$ für $y \notin V$. Da $\mathcal{U}$ abzählbar ist, ist das abzählbare Produkt

$$Z \coloneqq \prod_{\substack{U,V \in \mathcal{U} \\ \overline{U} \subseteq V}} [0,1]$$

metrisierbar (Übung). Wir definieren $F\colon X \to Z$ durch

$$F(x) \coloneqq \Big(f_{U,V}(x)\Big)_{\substack{U,V \in \mathcal{U} \\ \overline{U} \subseteq V}}$$

Da die $f_{U,V}$ stetig sind, ist $F$ bezüglich der Produkttopologie auf $Z$ auch stetig. Es bleibt zu zeigen, dass $F\colon X \to F(X) \subseteq Z$ ein Homöomorphismus ist.

Wir konstruieren nun zu $x, y \in X$ mit $x \neq y$, offene Mengen $U, V \in \mathcal{U}$ mit $\overline{U} \subseteq V$, $x \in U$, $y \notin V$. Da $X$ Hausdorff ist gibt es $V \in \mathcal{U}$ mit $x \in V$ und $y \notin V$. Nun trennen wir die abgeschlossenen Mengen $\{x\}$ und $X \setminus V$. Insbesondere gibt es $U \in \mathcal{U}$ mit $x \in U$ und $\overline{U} \cap X \setminus V = \emptyset$. Es ist $f_{U,V}(x) = 0 \neq 1 = f_{U,V}(y)$. Insbesondere ist $F$ injektiv; durch Einschränkung auf das Bild also bijektiv. Es genügt nun zu zeigen, dass $F$ offene Mengen von $X$ auf offene Mengen in $F(X)$ abbildet. Sei $W \subseteq X$ offen und $x \in W$. Wir müssen eine offene Menge $O \subseteq Z$ finden mit $F(x) \in O$ und $F^{-1}(O) \subseteq W$. Wir können zunächst $W$ verkleinern und $W \in \mathcal{U}$ annehmen. Weiter nehmen an, dass eine offene Menge $U_0 \in \mathcal{U}$ mit $x \in U_0$ und $\overline{U_0} \subseteq W$ existiert. Damit setzen wir $O \coloneqq \prod_{\overline{U} \subseteq V} I_{U,V}$ wobei

$$I_{U,V} = \begin{cases} [0,1), & \text{falls } U = U_0, V = W \\ [0,1], & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann ist $F^{-1}(O) = f^{-1}_{U_0,W}\big([0,1)\big) \subseteq W$ und $F(x) \in O$, da $f_{U_0,W}(x) = 0$.

Wir müssen noch die letzte Annahme rechtfertigen: Da $X$ Hausdorff ist, ist $\{x\}$ abgeschlossen. Da auch $X \setminus W$ abgeschlossen ist, gibt es offene mengen $U_1$ und $V_1$ mit $U_1 \cap V_1 = \emptyset$, $x \in U_1$ und $X \setminus W \subseteq V_1$. Insbesondere ist $\overline{U_1} \subseteq X \setminus V_1 \subseteq W$. Da $\mathcal{U}$ eine Basis ist, gibt es $U_0 \in \mathcal{U}$ mit $x \in U_0$ und $U_0 \subseteq U_1$. □

**7.6 Lemma.** Sei $X$ normal und $A, B \subseteq X$ abgeschlossen mit $A \cap B = \emptyset$. Dann gibt es eine stetige Funktion $f\colon X \to [0,1]$ mit $f(a) = 0$ für alle $a \in A$ und $f(b) = 1$ für alle $b \in B$.

**Beweis:** Sei $U_1 := X \setminus B$. Da $X$ normal ist, gibt es $U_0 \subseteq X$ offen mit $A \subseteq U_0$ und $U_0 \cap B = \emptyset$, also $\overline{U_0} \subseteq U_1$.[1] Ebenso finden wir

- $U_{1/2} \subseteq X$ offen mit $\overline{U_0} \subseteq U_{1/2}$ und $\overline{U_{1/2}} \subseteq U_1$,
- $U_{1/4}, U_{3/4} \subseteq X$ offen mit $\overline{U_0} \subseteq U_{1/4}, \overline{U_{1/4}} \subseteq U_{1/2}$ und $\overline{U_{1/2}} \subseteq U_{3/4}, \overline{U_{3/4}} \subseteq U_1, \ldots$

Induktiv finden wir für jedes $r = \frac{m}{2^n}$ mit $0 \leqslant m \leqslant 2^n$ eine offene Menge $U_r \subseteq X$ so dass gilt: $\overline{U_r} \subseteq U_s$ für $r < s$ mit $A \subseteq U_0$ und $B = X \setminus U_1$. Sei nun $f\colon X \to [0,1]$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in B \\ \inf\{r \mid x \in U_r\}, & \text{falls } x \notin B \end{cases}$$

Für $\alpha \in [0,1]$ ist $f^{-1}\big([0,\alpha)\big) = \bigcup_{r<\alpha} U_r$ offen und

$$f^{-1}\big((\alpha,1]\big) = \bigcup_{r>\alpha} X \setminus U_r = \bigcup_{r>\alpha} X \setminus \overline{U_r}$$

offen. Damit ergibt sich leicht die Stetigkeit von $f$. □

[1] $A \subseteq U_0$ und $V_0 \supseteq B$ mit $U_0 \cap V_0 = \emptyset \implies \overline{U_0} \cap B = \emptyset$ also $\overline{U_0} \subseteq U_1$

# 8 Zusammenhängende topologische Räume

**8.1 Definition.** Sei $X$ ein topologischer Raum.

**(1)** $X$ heißt ***zusammenhängend***, falls er nicht als die disjunkte Vereinigung von zwei nicht leeren offenen Mengen geschrieben werden kann.

**(2)** $X$ heißt ***wegzusammenhängend***, falls es zu allen $x, y \in X$ eine stetige Abbildung $\omega : [0,1] \to X$ gibt mit $\omega(0) = x$ und $\omega(1) = y$. $\omega$ heißt dann ein ***Weg*** von $x$ nach $y$.

**(3)** $X$ heißt ***lokal zusammenhängend***, falls es für jedes $x \in X$ und jede offene Umgebung $U$ von $x$ eine zusammenhängende Umgebung $V$ von $x$ gibt mit $V \subseteq U$.

**(4)** $X$ heißt ***lokal wegzusammenhängend***, falls es für jedes $x \in X$ und jede offene Umgebung $U$ von $x$ eine wegzusammenhängende Umgebung $V$ von $x$ gibt mit $V \subseteq U$.

**8.2 Bemerkung.** Einige Beispiele und Anmerkungen zu obigen Definitionen:

**(1)** $\mathbb{R}\setminus\{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ ist nicht zusammenhängend und auch nicht wegzusammenhängend, wie man leicht mit dem Zwischenwertsatz zeigen kann.

**(2)** $[0,1]$ ist zusammenhängend: Angenommen es wäre $[0,1] = U \cup V$ mit $U, V$ offen, $U \cap V = \emptyset$. Dann sind $U = [0,1] \setminus V$ und $V = [0,1] \setminus U$ auch abgeschlossen. O.B.d.A. sei $0 \in U$. Dann liegt $\inf V$ sowohl in $\overline{V}$ als auch in $\overline{U}$. Also $U \cap V = \overline{U} \cap \overline{V} \neq \emptyset$ $\lightning$.

Natürlich ist $[0,1]$ auch wegzusammenhängend: Zu $x, y \in [0,1]$ ist $\omega\colon [0,1] \to [0,1]$ mit $\omega(t) = (1-t) \cdot x + t \cdot y$ ein stetiger Weg von $x$ nach $y$.

**(3)** Ist $f\colon X \to Y$ stetig und surjektiv und $X$ zusammenhängend, so ist auch $Y$ zusammenhängend: Ist $Y = U \dot\cup V$, so ist auch $X = f^{-1}(U) \dot\cup f^{-1}(V)$ und es gilt $U \neq \emptyset \iff f^{-1}(U) \neq \emptyset$ und $V \neq \emptyset \iff f^{-1}(V) \neq \emptyset$.

**(4)** Ist $X$ wegzusammenhängend, so ist $X$ auch zusammenhängend: Sei $X = U \cup V$ mit $U, V$ offen und $U \neq \emptyset$, $V \neq \emptyset$. Sei $x \in U$ und $y \in V$. Da $X$ wegzusammenhängend ist, gibt es einen Weg $\omega\colon [0,1] \to X$ von $x$ nach $y$. Dann ist $[0,1] = \omega^{-1}(U) \cup \omega^{-1}(V)$. Es ist $0 \in \omega^{-1}(U)$ und $1 \in \omega^{-1}(V)$. Also $\omega^{-1}(U) \neq \emptyset \neq \omega^{-1}(V)$. Da $[0,1]$ nach (1) zusammenhängend ist, ist $\omega^{-1}(U) \cap \omega^{-1}(V) \neq \emptyset$. Damit ist auch $U \cap V \neq \emptyset$.

**(5)** Ist $f\colon X \to Y$ ein Homöomorphismus, so gelten:

$$\begin{aligned} X \text{ wegzusammenhängend} &\iff Y \text{ wegzusammenhängend} \\ X \text{ zusammenhängend} &\iff Y \text{ zusammenhängend} \end{aligned}$$

**8.3 Beispiel.** Die eben definierten Begriffe sind nicht äquivalent:

**(i)** Der sogenannte ***Polnische Kreis*** PK, gegeben durch

$$\mathrm{PK} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{lll} & (x \in [-1,1] & \wedge \quad y = 1) \\ \vee & (x \in \{-1,1\} & \wedge \quad y \in [0,1]) \\ \vee & (x \in [-1,0] & \wedge \quad y = 0) \\ \vee & (x = 0 & \wedge \quad y \in [-1/2, 1/2]) \\ \vee & (x \in (0,1] & \wedge \quad y = 1/2 \cdot \sin(\pi/x)) \end{array} \right\}$$

ist wegzusammenhängend, aber nicht lokal wegzusammenhängend.

**(ii)** Die folgende Teilmenge ist zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend.

$$\left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{lll} & x = 0 & \wedge \quad y \in [-1/2, 1/2] \\ \vee & x \in (0,1] & \wedge \quad y = 1/2 \cdot \sin(\pi/x) \end{array} \right\}$$

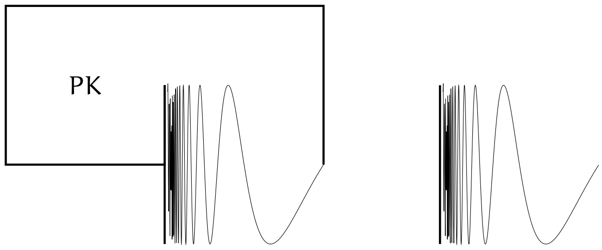



**Abbildung 3:** Der Polnische Kreis und eine nicht wegzusammenhängende Teilmenge davon

Wir können nun einen ersten Spezialfall der topologischen Invarianz der Dimension zeigen:

**8.4 Satz.** Es gilt: $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^m \iff n = m$

**Beweis** (für $n = 1$)**:** Angenommen es gäbe einen Homöomorphismus $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ mit $m \geqslant 2$. Durch Einschränkung von f erhalten wir dann auch einen Homöomorphismus $\mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}^m\setminus\{f(0)\}$. Nach obiger Bemerkung ist $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ aber nicht wegzusammenhängend und für $m \geqslant 2$, $x \in \mathbb{R}^m$ ist $\mathbb{R}^m \setminus \{x\}$ wegzusammenhängend $\lightning$. $\square$

Eine Variante dieses Arguments kann benutzt werden, um zu zeigen, dass $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^m$ genau dann gilt, wenn $n = m$. Dafür benötigt man aber höher dimensionale Varianten des Begriffes „wegzusammenhängend".

# 9 Die Fundamentalgruppe

**9.1 Definition.** Ein topologischer Raum $X$ heißt ***einfach zusammenhängend***, wenn jede stetige Abbildung $f\colon S^1 \to X$ eine stetige Fortsetzung $F\colon D^2 \to X$ besitzt.

Er heisst lokal einfach zusammenhängend falls es zu jedem $x$ und jeder offenen Umgebung von $x$ eine einfach zusammenhängende Umgebung $V$ von $x$ mit $V \subseteq U$ gibt.

**9.2 Bemerkung.** Ein topologischer Raum $X$ ist genau dann wegzusammenhängend, wenn jede stetige Abbildung $f\colon S^0 \to X$ ein stetige Fortsetzung $F\colon D^1 \to X$ besitzt.

**9.3 Bemerkung.** **(i)** $\mathbb{R}^n$ ist einfach zusammenhängend: Sei $f\colon S^1 \to \mathbb{R}^n$ stetig. Dann erhält man eine Fortsetzung $F\colon D^2 \to \mathbb{R}^n$ durch

$$F(t \cdot v) := t \cdot f(v) \qquad \text{für } t \in [0,1], v \in S^1$$

**(ii)** Ist $X \cong Y$ dann gilt: $X$ einfach zusammenhängend $\iff$ $Y$ einfach zusammenhängend.

**(iii)** Wir werden später sehen: $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ist *nicht* einfach zusammenhängend.

**9.4 Definition.** Seien $\omega_0, \omega_1 \colon [0,1] \to X$ Wege in $X$. Eine ***Homotopie mit festen Endpunkten*** (oder relativ $\{0,1\}$) zwischen $\omega_0$ und $\omega_1$ ist eine stetige Abbildung $H\colon [0,1] \times [0,1] \to X$, so dass gilt:

**(i)** $H(s,0) = \omega_0(s) \;\; \forall s \in [0,1]$

**(ii)** $H(s,1) = \omega_1(s) \;\; \forall s \in [0,1]$

**(iii)** $H(0,t) = \omega_0(0) = \omega_1(0) \;\; \forall t \in [0,1]$

**(iv)** $H(1,t) = \omega_0(1) = \omega_1(1) \;\; \forall t \in [0,1]$

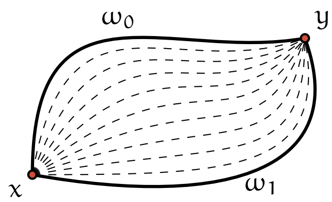



**Abbildung 4:** Homotopie relativ $\{0,1\}$

Durch

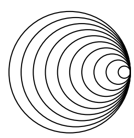
$$\omega_0 \sim \omega_1 :\iff \exists \text{ Homotopie relativ } \{0,1\} \text{ zwischen } \omega_0 \text{ und } \omega_1$$

wird eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Wege in $X$ erklärt. Die Äquivalenzklassen heißen ***Homotopieklassen***, wir schreiben $[\omega]$ für die Homotopieklasse von $\omega$.

**9.5 Definition.** Ein Weg $\omega\colon [0,1] \to X$ heißt eine ***Schleife*** in $X$, falls $\omega(0) = \omega(1)$ gilt.

**9.6 Lemma.** $X$ ist genau dann einfach zusammenhängend, wenn jede Schleife in $X$ homotop relativ $\{0,1\}$ zu einer konstanten Schleife ist.

**Beweis:**



□

**9.7 Notation.** Für $x \in X$ bezeichne $c_x\colon [0,1] \to X$ die konstante Schleife bei $x$, d.h. $c_x(t) = x$ für alle $t \in [0,1]$.

**9.8 Definition.** Seien $\omega$ und $\omega'$ Wege in X mit $\omega'(0) = \omega(0)$. Dann ist der ***Kompositionsweg*** $\omega * \omega' \colon [0,1] \to X$ definiert durch

$$\omega * \omega'(t) = \begin{cases} \omega'(2t), & \text{falls } t \in [0, 1/2] \\ \omega(2t-1), & \text{falls } t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

**9.9 Lemma.** Kompositionswege haben die folgenden Eigenschaften:

**a)** Seien $\omega, \omega', \omega''$ Wege in X mit $\omega''(1) = \omega'(0)$ und $\omega'(1) = \omega(0)$. Dann gilt

$$\big[(\omega * \omega') * \omega''\big] = \big[\omega * (\omega' * \omega'')\big]$$

**b)** Seien $\omega_0, \omega_0', \omega_1, \omega_1'$ Wege in X mit $\omega_0'(1) = \omega_0(0)$, $\omega_1'(1) = \omega_1(0)$ und $[\omega_0] = [\omega_1]$ und $[\omega_0'] = [\omega_1']$. Dann gilt

$$[\omega_0 * \omega_0'] = [\omega_1 * \omega_1']$$

**c)** Sei $\omega$ ein Weg in X und $\overline{\omega} \colon [0,1] \to X$ der umgekehrte Weg, also $\overline{\omega}(t) := \omega(1-t)$. Dann gilt $[\omega * \overline{\omega}] = [c_{\omega(1)}]$ und $[\overline{\omega} * \omega] = [c_{\omega(0)}]$.

**d)** Sei $\omega$ ein Weg in X. Dann gilt

$$\big[\omega * c_{\omega(0)}\big] = [\omega] = \big[c_{\omega(1)} * \omega\big]$$

**Beweis:** Wir zeigen an dieser Stelle nur a), die anderen Beweise funktionieren ähnlich.

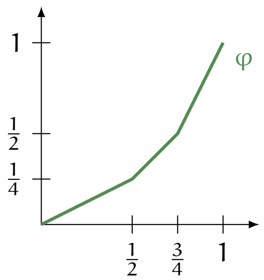



**Abbildung 5:** Funktion $\varphi$ aus dem Beweis von Lemma 9.9

Sei $\varphi \colon [0,1] \to [0,1]$ gegeben wie in Abbildung 5 gezeichnet. Dann gilt

$$\Big((\omega * \omega') * \omega''\Big)(s) = \Big(\omega * (\omega' * \omega'')\Big)(\varphi(s))$$

Die gesuchte Homotopie mit festen Endpunkten wird durch

$$H(s,t) := \Big((\omega * \omega') * \omega''\Big)\big((1-t)s + t\varphi(s)\big)$$

definiert. □

**9.10 Korollar.** Sei X ein topologischer Raum und $x_0 \in X$ fest. Dann wird

$$\pi_1(X, x_0) := \big\{[\omega] \,\big|\, \omega \text{ ist eine Schleife in } X \text{ mit } \omega(0) = x_0\big\}$$

durch die Komposition von Wegen zu einer Gruppe mit neutralem Element $e = [c_{x_0}]$.

**9.11 Definition.** $\pi_1(X, x_0)$ heißt die ***Fundamentalgruppe*** von $X$ bezüglich des ***Basispunktes*** $x_0$.

**9.12 Bemerkung.** Wegen Lemma 9.6 gilt: $X$ ist genau dann einfach zusammenhängend, wenn $\pi_1(X, x_0)$ für alle $x_0 \in X$ die triviale Gruppe ist.

**9.13 Bemerkung.** Sei $\eta$ ein Weg in $X$ von $x_1$ nach $x_0$. Dann definiert

$$\pi_1(X, x_0) \ni [\omega] \xmapsto{\mathrm{conj}_\eta} [(\overline{\eta} * \omega) * \eta] \in \pi_1(X, x_1)$$

einen Isomorphismus zwischen $\pi_1(X, x_0)$ und $\pi_1(X, x_1)$.

**Beweis:** Wir zeigen nur, dass $\mathrm{conj}_\eta$ ein Gruppenhomomorphismus ist. Unter Benutzung der einzelnen Aussagen von Lemma 9.9 erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\mathrm{conj}_\eta([\omega] * [\omega']) = \mathrm{conj}_\eta\big([\omega * \omega']\big) &= \Big[\big(\overline{\eta} * (\omega * \omega')\big) * \eta\Big] \\
\mathrm{conj}_\eta([\omega]) \cdot \mathrm{conj}_\eta([\omega']) = \big[(\overline{\eta} * \omega) * \eta\big] \cdot \big[(\overline{\eta} * \omega') * \eta\big] &= \Big[\big((\overline{\eta} * \omega) * \eta\big) * \big((\overline{\eta} * \omega') * \eta\big)\Big] \\
&\overset{a)}{=} \Big[\Big(\overline{\eta} * \big(\omega * (\eta * \overline{\eta})\big) * \omega'\Big) * \eta\Big] \overset{c)}{=} \Big[\Big(\overline{\eta} * \big((\omega * c_{\omega(1)}) * \omega'\big)\Big) * \eta\Big] \\
&\overset{d)}{=} \Big[\big(\overline{\eta} * (\omega * \omega')\big) * \eta\Big]
\end{aligned}$$

Insbesondere hängt der Isomorphietyp von $\pi_1(X, x_0)$ für wegzusammenhängende Räume nicht von der Wahl des Basispunktes ab. □

# 10 Die Windungszahl

**Frage.** $\pi_1\big(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, x_0\big) = ?$ $\qquad \pi_1\big(S^1, x_0\big) = ?$

**10.1 Proposition.** Sei $p\colon \mathbb{R} \to S^1$ definiert durch $p(t) = e^{2\pi i t}$. Sei $\omega\colon [0,1] \to S^1$ stetig und $t_0 \in \mathbb{R}$ mit $p(t_0) = \omega(0)$. Dann gibt es eine eindeutige stetige Abbildung $\hat{\omega}\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $\hat{\omega}(0) = t_0$ und $p \circ \hat{\omega} = \omega$.

$$\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r, "t_0"] \arrow[d] & \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\
{[0,1]} \arrow[r, "\omega"] \arrow[ur, dashed, "\hat{\omega}"] & S^1
\end{tikzcd}$$

Ist $\eta\colon [0,1] \to S^1$ eine weitere Abbildung mit $[\eta] = [\omega]$ und $\hat{\eta}\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $\hat{\eta}(0) = t_0$, $p \circ \hat{\eta} = \eta$ so gilt $\hat{\eta}(1) = \hat{\omega}(1)$.

Beweis: *Mit dem Homotopiehebungssatz (siehe Satz 10.7).* □

**10.2 Definition.** Sei $\omega\colon [0,1] \to S^1$ eine Schleife in $S^1$ mit $\omega(0) = \omega(1) = 1$. Sei $\hat{\omega} : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $p \circ \hat{\omega} = \omega$ und $\hat{\omega}(0) = 0$. Dann heißt $\hat{\omega}(1) \in \mathbb{Z} = p^{-1}(1)$ die ***Windungszahl*** von $\omega$.

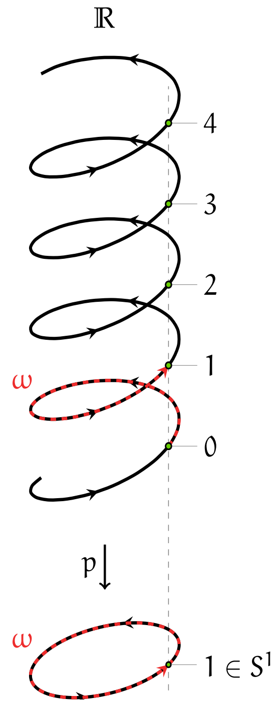


**Abbildung 6:** Schleife $\omega$ mit der Windungszahl 1

**10.3 Satz.** Die Windungszahl definiert einen Isomorphismus $d\colon \pi_1(S^1, 1) \to \mathbb{Z}$, $[\omega] \mapsto \hat{\omega}(1)$.

Beweis: Nach Proposition 10.1 ist $d$ eine wohldefinierte Abbildung.
Für die Surjektivität betrachten wir stetige Abbildungen $\hat{\omega}_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch $\hat{\omega}_n(t) = t \cdot n$ für $n \in \mathbb{Z}$. Dann ist

$$d\big([p \circ \hat{\omega}_n]\big) = \hat{\omega}_n(1) = n$$

und $d$ somit surjektiv.
Wir zeigen nun, dass $d$ ein Gruppenhomomorphismus ist. Seien dazu $\omega, \eta\colon [0,1] \to S^1$ zwei Schleifen mit $\omega(0) = \eta(0) = 1$. Seien $\hat{\omega}, \hat{\eta}\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ Hebungen mit $\hat{\eta}(0) = 0, \hat{\omega}(0) = 0, p \circ \hat{\omega} = \omega, p \circ \hat{\eta} = \eta$. Es gilt also $d([\omega]) = \hat{\omega}(1)$ und $d([\eta]) = \hat{\eta}(1)$. Sei nun $\hat{\omega}_+\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch $\hat{\omega}_+(s) = \hat{\omega}(s) + \hat{\eta}(1)$. Dann ist $\hat{\omega}_+ * \hat{\eta}$ wohldefiniert und es gilt $(\hat{\omega}_+ * \hat{\eta})(0) = 0$ sowie $(\hat{\omega}_+ * \hat{\eta})(1) = \hat{\eta}(1) + \hat{\omega}(1)$. Also folgt

$$d\big([\omega * \eta]\big) = (\hat{\omega}_+ * \hat{\eta})(1) = \hat{\eta}(1) + \hat{\omega}(1) = d([\omega]) + d([\eta]).$$

Kommen wir schließlich zur Injektivität: Sei $\omega\colon [0,1] \to S^1$ eine Schleife mit $d([\omega]) = 0$. Dann gibt es $\hat{\omega}\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $\hat{\omega}(0) = 0 = \hat{\omega}(1)$ und $p \circ \hat{\omega} = \omega$. Nun ist $H\colon [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ mit

$$H(s,t) := (1-t) \cdot \hat{\omega}(s)$$

eine Homotopie mit festen Endpunkten zwischen $\hat{\omega}$ und $c_0$. Dann ist $p \circ H$ eine Homotopie mit festen Endpunkten zwischen $\omega$ und $c_1$. Also $[\omega] = e \in \pi_1(S^1, 1)$. □

**10.4 Definition.** Eine surjektive stetige Abbildung $p\colon \hat{X} \to X$ heißt eine ***Überlagerung***, falls es zu jedem $x \in X$ eine Umgebung $U$ gibt, so dass sich $p^{-1}(U)$ schreiben lässt als die disjunkte Vereinigung von offenen Mengen $U_i \subseteq \hat{X}$ und für jedes $i$ die Einschränkung $p|_{U_i}\colon U_i \to U$ ein Homöomorphismus ist. Eine solche Umgebung $U$ heißt eine ***elementare Umgebung***.

**10.5 Beispiel.** **(1)** $p\colon \mathbb{R} \to S^1$, $t \mapsto e^{2\pi i t}$ ist eine Überlagerung.

**(2)** $p_n\colon S^1 \to S^1$, $z \mapsto z^n$ ist eine Überlagerung.

**(3)** Sind $p\colon \hat{X} \to X$, $q : \hat{Y} \to Y$ Überlagerungen, so ist $p \times q\colon \hat{X} \times \hat{Y} \to X \times Y$ eine Überlagerung. Man erhält so zum Beispiel einer Überlagerung des Torus: $\mathbb{R}^2 \to T^2 = S^1 \times S^1$.

**(4)** Die Quotientenabbildung $S^2 \to \mathbb{R}P^2 = S^2/_{x \sim -x}$ ist eine Überlagerung. (Übung!)

**10.6 Definition.** Sei $p\colon \hat{X} \to X$ eine Überlagerung und $f\colon Z \to X$ eine stetige Abbildung. Eine ***Hebung*** oder ein ***Lift*** von $f$ (bezüglich $p$) ist eine stetige Abbildung $\hat{f}\colon Z \to \hat{X}$ mit $p \circ \hat{f} = f$.

$$\begin{tikzcd} & \hat{X} \arrow[d, "p"] \\ Z \arrow[ur, dashed, "\hat{f}"] \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

**10.7 Satz** (Homotopiehebungssatz). Sei $p\colon \hat{X} \to X$ eine Überlagerung, $H\colon Z \times [0,1] \to X$ eine Homotopie und $\hat{f}\colon Z \to \hat{X}$ eine Hebung von $f = H(-,0) := H\big|_{Z \times \{0\}}$. Dann gibt es eine *eindeutige* Hebung $\hat{H}$ von $H$ mit $\hat{H}(-,0) = \hat{f}$.

$$\begin{tikzcd} Z \times \{0\} \arrow[r, "\hat{f}"] \arrow[d, hook, "i"'] & \hat{X} \arrow[d, "p"] \\ Z \times [0,1] \arrow[ur, dashed, "\hat{H}"] \arrow[r, "H"] & X \end{tikzcd}$$

**Beweis:** Sei $\mathcal{U}$ eine Überdeckung von $X$ durch elementare Umgebungen. Wir können $\mathcal{U}$ mittels $H$ zurückziehen und erhalten eine offene Überdeckung $H^{-1}(\mathcal{U}) := \{H^{-1}(U) \mid U \in \mathcal{U}\}$ von $Z \times [0,1]$.

*die $H^{-1}(U_i)$ überdecken $\{z_0\} \times [0,1]$*

Sei $z_0 \in Z$ fest. Da $\{z_0\} \times [0,1]$ kompakt ist, gibt es $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ und $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{U}$ mit

$$H\big(\{z_0\} \times [t_i, t_{i+1}]\big) \subseteq U_i$$

Da die $U_i$ offen sind gibt es zu jedem $i$ eine offene Umgebung $V_i$ von $z_0$ mit $H\big(V_i \times [t_i, t_{i+1}]\big) \subseteq U_i$. Sei $V := \bigcap_{i=1}^n V_i$, dann ist $H\big(V \times [t_i, t_{i+1}]\big) \subseteq U_i$. Da alle $U_i$ elementar sind, finden wir induktiv eindeutige Hebungen $\hat{H}_i^V$ von $H\big|_{V \times [t_i, t_{i+1}]}$ mit

$$\hat{H}_i^V(-,0) = \hat{f}\big|_V \quad \text{und} \quad \hat{H}_i^V(-,t_i) = \hat{H}_{i-1}^V(-,t_i).$$

Nun erhalten wir mit $\hat{H}^V(z,t) := \hat{H}_i^V(z,t)$ für $z \in V$, $t \in [t_i, t_{i+1}]$ eine eindeutige Hebung von $H\big|_{V \times [0,1]}$ mit $\hat{H}^V(-,0) = \hat{f}\big|_V$. Dabei bleibt $\hat{H}^V$ eindeutig auch wenn wir $V$ verkleinern. Nun finden wir für jedes $z \in Z$ eine Umgebung $V_z$ und eine eindeutige Hebung $\hat{H}^{V_z}$ von $H\big|_{V_z \times [0,1]}$ mit $\hat{H}^{V_z}(-,0) = \hat{f}\big|_{V_z}$. Wegen der Eindeutigkeit gilt

$$\hat{H}^{V_z}(\xi, t) = \hat{H}^{V_{z'}}(\xi, t)$$

für alle $\xi \in V_z \cap V_{z'}$. Daher definiert $\hat{H}(z,t) := \hat{H}^{V_z}(z,t)$ die gesuchte eindeutige Hebung. $\square$

# 11 Induzierte Abbildungen

**11.1 Lemma.** Sei $f\colon X \to Y$ stetig mit $f(x_0) = y_0$. Dann definiert $f_*([\omega]) := [f \circ \omega]$ einen Gruppenhomomorphismus $f_*\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$.

**Beweis:** Wir zeigen nur, dass $f_*$ wohldefiniert ist. Seien $\omega, \eta\colon [0,1] \to X$ Schleifen mit $\omega(0) = x_0 = \eta(0)$ und $[\omega] = [\eta]$. Es gibt also eine Homotopie $H\colon [0,1] \times [0,1] \to X$ mit festen Endpunkten zwischen $\omega$ und $\eta$.Dann ist $f \circ H$ eine Homotopie mit festen Endpunkten zwischen $f \circ \omega$ und $f \circ \eta$. Also

$$f_*([\omega]) = [f \circ \omega] = [f \circ \eta] = f_*([\eta]) \in \pi_1(Y, y_0)$$

□

**11.2 Definition.** $f_*$ heißt die von $f$ ***induzierte Abbildung***. Manchmal schreibt man auch $\pi_1(f)$ für $f_*$, um $f_*$ von anderen induzierten Abbildungen zu unterscheiden.

**11.3 Bemerkung.** Es gelten:

**(i)** Für $f\colon Y \to Z$, $g\colon Y \to Y$ gilt $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$.

**(ii)** Es gilt $(\mathrm{id}_X)_* = \mathrm{id}_{\pi_1(X,x_0)}$.

Damit ist $\pi_1$ ein sogenannter Funktor.

**11.4 Definition.** Ein topologischer Raum $X$ zusammen mit einem Basispunkt $x_0 \in X$, $(X, x_0)$ heißt ein ***punktierter Raum***. Eine ***punktierte Abbildung*** zwischen punktierten Räumen $f\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ ist eine stetige Abbildung $f\colon X \to Y$ mit $f(x_0) = y_0$. Punktierte Abbildungen $f, g\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ heißen ***punktiert homotop***, falls es eine Homotopie $H\colon X \times [0,1] \to Y$ von $f$ nach $g$ gibt mit

$$H(x_0, t) = y_0 \;\; \forall t \in [0,1].$$

Wir schreiben dann $f \simeq g$.

**11.5 Proposition** (Homotopieinvarianz von $\pi_1$). Seien $f, g\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ homotop. Dann gilt

$$f_* = g_*\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$$

**Beweis:** Sei $H$ eine Homotopie zwischen $f$ und $g$. Für $[\omega] \in \pi_1(X, x_0)$ ist $H \circ \omega$ eine Homotopie mit festen Endpunkten zwischen $f \circ \omega$ und $g \circ \omega$. Also

$$f_*([\omega]) = [f \circ \omega] = [g \circ \omega] = g_*([\omega])$$

□

**11.6 Definition.** Seien $X, Y$ topologische Räume. Dann heißen $X$ und $Y$ ***homotopieäquivalent***, falls es stetige Abbildungen $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to X$ gibt, so dass

$$f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y \;\text{ und }\; g \circ f \simeq \mathrm{id}_X\,.$$

Wir schreiben dann $X \simeq Y$ oder $X \underset{\simeq}{\xrightarrow{f}} Y$. $g$ heißt ***Homotopie-Inverse*** von $f$. Entsprechendes benutzen wir auch für punktierte Räume. Falls $X \simeq \{0\}$, so sagen wir: $X$ ist ***zusammenziehbar***.

**11.7 Beispiel.** **(1)** $S^{n-1}$ ist homotopieäquivalent zu $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$:
Betrachte dazu die Inklusion $i\colon S^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und die Normierung $p\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to S^{n-1}$, $v \mapsto \frac{v}{\|v\|}$. Dann gilt

$$p \circ i = \mathrm{id}_{S^{n-1}} \quad , \quad i \circ p \simeq \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$$

mit der Homotopie $H(v, t) = t \cdot v + (1 - t)\frac{v}{\|v\|}$.

**(2)** Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ eine konvexe Teilmenge und $x_0 \in K$. Dann ist $(K, x_0)$ zusammenziehbar:

$$\begin{array}{lll} i : (\{x_0\}, x_0) & \to (K, x_0) & \text{die Inklusion} \\ p : (K, x_0) & \to (\{x_0\}, x_0) & \text{die konstante Abbildung} \end{array}$$

$p \circ i = \mathrm{id}_{(\{x_0\}, x_0)}$ und $i \circ p \simeq \mathrm{id}_{(K, x_0)}$ mit der Homotopie $H(x, t) = t \cdot x + (1 - t)x_0$.

**11.8 Satz.** Ist $f\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ eine Homotopieäquivalenz, so ist $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ ein Isomorphismus. Insbesondere ist $\pi_1(X, x_0) = \{1\}$, falls $(X, x_0)$ zusammenziehbar ist.

**Beweis:** Sei $g\colon (Y, y_0) \to (X, x_0)$ eine Homotopie-Inverse zu $f$, also $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$, $f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$. Dann ist $g_* = (f_*)^{-1}$ (und $f_*$ ein Isomorphismus):

$$\begin{aligned} f_* \circ g_* &= (f \circ g)_* = (\mathrm{id}_Y)_* = \mathrm{id}_{\pi_1(Y, y_0)} \\ g_* \circ f_* &= (g \circ f)_* = (\mathrm{id}_X)_* = \mathrm{id}_{\pi_1(X, x_0)} \end{aligned}$$

□

**11.9 Satz** (Fixpunktsatz von Brouwer). Jede stetige Abbildung $f\colon D^n \to D^n$ hat einen Fixpunkt.

**Beweis** (für $n \leqslant 2$): Für $n = 1$ ist dies eine Folgerung aus dem Zwischenwertsatz.

Angenommen $f\colon D^n \to D^n$ habe keinen Fixpunkt, also $f(x) \neq x$ für alle $x \in D^n$. Wir konstruieren eine stetige Abbildung $F\colon D^n \to S^{n-1}$ mit $F|_{S^{n-1}} = \mathrm{id}_{S^{n-1}}$ wie in Abbildung 7, sodass gilt

**(i)** $F(x) = t\big(x - f(x)\big) + x \;\; , t \geqslant 0$

**(ii)** $F(x) \in S^{n-1}$

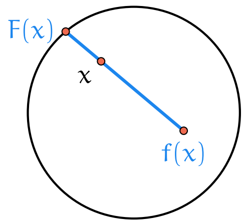



**Abb. 7:** Konstruktion von $F$

Sei $x_0 \in S^{n-1}$. Wir haben also

$$\begin{tikzcd} (S^{n-1}, x_0) \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, hook, "i"] & (S^{n-1}, x_0) \\ (D^n, x_0) \arrow[ur, "F"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \pi_1(S^{n-1}, x_0) \arrow[r, "(\mathrm{id})_* = \mathrm{id}"] \arrow[d, "i_*"] & \pi_1(S^{n-1}, x_0) \\ \pi_1(D^n, x_0) \arrow[ur, "F_*"'] & \end{tikzcd}$$

Da $(D^n, x_0)$ zusammenziehbar ist, gilt $\pi_1(D^n, x_0) = \{e\}$. Für $n = 2$ ist das zweite Diagramm also

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r, "(\mathrm{id})_* = \mathrm{id}"] \arrow[d, "i_*"] & \mathbb{Z} \\ \{e\} \arrow[ur, "F_*"'] & \end{tikzcd}$$

Daher folgt $\mathrm{id} = F_* \circ i_* =$ triviale Null-Abbildung. ↯

□

Für $n \geqslant 3$ ist $\pi_1(S^{n-1}, x_0)$ trivial. In diesem Fall benutzt der Beweis eine andere Invariante als die Fundamentalgruppe.

**11.10 Proposition.** Für $n \in \mathbb{Z}$ sei $f_n \colon S^1 \to S^1$, $z \mapsto z^n$.Dann ist $(f_n)_* \colon \pi_1(S^1, 1) \to \pi_1(S^1, 1)$ durch Multiplikation mit $n$ gegeben:

$$(f_n)_*([\omega]) = n \cdot [\omega] \in \pi_1(S^1, 1) = \mathbb{Z}$$

Weiter sind die $f_n$ paarweise nicht homotop zueinander.

**Beweis:** Sei $p \colon \mathbb{R} \to S^1$, $t \mapsto e^{2\pi i t}$. Zu jeder Schleife $\omega \colon [0,1] \to S^1$ mit $\omega(0) = \omega(1) = 1$ gibt es eine eindeutige Hebung $\hat{\omega} \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ zu einem Weg mit $\hat{\omega}(0) = 0$. Der Isomorphismus $d \colon \pi_1(S^1, 1) \to \mathbb{Z}$ bildet $[\omega]$ auf $\hat{\omega}(1) \in \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$ ab. Sei $\hat{f}_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto n \cdot t$. Dann gilt $p \circ \hat{f}_n = f_n \circ p$ und $\hat{f}_n(0) = 0$. Ist $\hat{\omega}$ eine Hebung von $\omega$, so ist $\hat{f}_n \circ \hat{w}$ eine Hebung von $f_n \circ \omega$, da

$$\begin{aligned} (\hat{f}_n \circ \hat{\omega})(0) &= \hat{f}_n(0) = 0 \\ p \circ \hat{f}_n \circ \hat{\omega} &= f_n \circ p \circ \hat{\omega} = f_n \circ \omega \end{aligned}$$

Es folgt

$$d\big([f_n \circ \omega]\big) = (\hat{f}_n \circ \hat{\omega})(1) = \hat{f}_n\big(\hat{\omega}(1)\big) = \hat{f}_n(d[\omega]) = n \cdot d[\omega]$$

Da $d$ ein Isomorphismus ist, folgt die Behauptung.

Mit der Homotopieinvarianz von induzierten Abbildungen folgt, dass die $f_n \colon (S^1, 1) \to (S^1, 1)$ als punktierte Abbildungen paarweise nicht punktiert homotop sind. Mit dem nächsten Lemma folgt das die $f_n$ paarweise nicht homotop sind. □

**11.11 Lemma.** Seien $f, g \colon (X, x_0) \to (S^1, 1)$ stetig. Sei $H \colon X \times [0,1] \to S^1$ eine (unpunktierte) Homotopie zwischen $f$ und $g$. Dann ist $\tilde{H} \colon X \times [0,1] \to S^1$,

$$\tilde{H}(x, t) = \frac{H(x, t)}{H(x_0, t)}$$

ein punktierte Homotopie zwischen $f$ und $g$.

**Beweis:** Es ist $\tilde{H}(x_0, t) = \frac{H(x_0,t)}{H(x_0,t)} = 1$ für alle $t$. Da $H(x_0, 0) = f(x_0) = 1 = g(x_0) = H(x_0, 1)$ gilt, ist

$$\tilde{H}(x, 0) = H(x, 0) = f(x) \quad \text{und} \quad \tilde{H}(x, 1) = H(x, 1) = g(x). \qquad \square$$

**11.12 Satz (Hauptsatz der Algebra).** Jedes Polynom $p = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_0 \in \mathbb{C}[X]$ von $\operatorname{grad} p = n \geqslant 1$ hat eine Nullstelle.

**Beweis:** Angenommen $p$ habe keine Nullstelle.Man kann zeigen, dass dann $f_n \colon S^1 \to S^1$, $z \mapsto z^n$ homotop zu einer konstanten Abbildung ist (Übung). Aus Proposition 11.10 folgt dann aber $n = 0$. □

# 12 Eigentlich diskontinuierliche Wirkungen

**12.1 Definition.** Sei G eine Gruppe und X ein topologischer Raum.

**(1)** Eine ***Wirkung*** $G \curvearrowright X$ von G auf X ist eine Abbildung $G \times X \to X$, $(g, x) \mapsto g.x$, so dass gilt

- Für $g \in G$ ist $\lambda_g \colon X \to X$, $x \mapsto g.x$ stetig.
- Für $g, h \in G$ gilt $g.(h.x) = (g.h).x$
- Für das neutrale Element $e \in G$ gilt $e.x = x$ für alle $x \in X$

**(2)** Eine Wirkung heißt ***frei***, falls $g.x = x \implies g = e$. ($G \to \mathrm{Sym}(X)$ ist injektiv)

**(3)** Eine Wirkung heißt ***eigentlich diskontinuierlich*** (e.d.k.), falls es zu jedem $x \in X$ eine Umgebung U von x gibt mit $gU \cap U = \emptyset$ für alle $g \in G \setminus \{e\}$.

**(4)** Durch $x \sim y :\Leftrightarrow \exists g \in G : g.x = y (\Leftrightarrow Gx = Gy)$ wird eine Äquivalenzrelation auf X erklärt. Die Äquivalenzklassen dieser Äquivalenzrelation sind genau die ***Bahnen*** $Gx = \{g.x \mid g \in G\}$ der Wirkung. Die Menge der Äquivalenzklassen bezeichnen wir mit $G\backslash X := X/_\sim$. Durch die Quotiententopologie bezüglich der Quotientenabbildung $X \to G\backslash X$, $x \mapsto Gx$ wird $G\backslash X$ zu einem topologischen Raum.

**12.2 Lemma.** Sei $G \curvearrowright X$ eine e.d.k Wirkung. Dann ist $p := X \to G\backslash X$, $x \mapsto Gx$ eine Überlagerung.

**Beweis:** Offenbar ist p surjektiv und stetig. Sei $\bar{x} := Gx \in G\backslash X$. Sei U eine offene Umgebung von $x \in X$, für die $gU \cap U = \emptyset$ für alle $g \neq e$ ist. Dann ist

$$p^{-1}\big(p(U)\big) = \bigcup_{g \in G} gU$$

die disjunkte Vereinigung der $gU$, $g \in G$. Weiter ist $p\colon U \to p(U)$ ein Homöomorphismus. Da p offenbar stetig und bijektiv ist müssen wir nur noch zeigen, dass p offen ist. Sei $V \subseteq U$ offen. Dann ist $p^{-1}(p(V)) = \bigcup_{g \in G} gU$ die Vereinigung offener Mengen also offen. Da $G\backslash X$ die Quotiententopologie trägt, ist auch $p(V)$ offen. Insgesamt ist $p(U)$ nun eine elementare Umgebung von $\bar{x}$. □

**12.3 Beispiel.** **(1)** $\mathbb{Z}^n \curvearrowright \mathbb{R}^n$ mit $z.x := x + z$ ist eine e.d.k. Wirkung: Ist $\varepsilon < \frac{1}{2}$ so gilt

$$B_\varepsilon(x) \cap B_\varepsilon(x) + z = B_\varepsilon(x) \cap B_\varepsilon(x + z) = \emptyset$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$, $z \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$. Da $\mathbb{Z}\backslash\mathbb{R} \cong S^1$ folgt $\mathbb{Z}^n\backslash\mathbb{R}^n \cong (\mathbb{Z}\backslash\mathbb{R})^n \cong (S^1)^n = T^n$. Wir erhalten eine Überlagerung $\mathbb{R}^n \to T^n$ des n-Torus.

**(2)** Sei $\mathbb{Z}/2 = \{e, \tau\}$. Durch $\tau.v := -v$ erhalten wir eine e.d.k. Wirkung $\mathbb{Z}/2 \curvearrowright S^n$. Dann gilt

$$\mathbb{Z}/2\backslash S^n \cong \mathbb{R}P^n$$

und wir erhalten eine Überlagerung $S^n \to \mathbb{R}P^n$.

**(3)** Zu $m, n \in \mathbb{Z}$ sei $f_{n,m} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f_{n,m}(x, y) = \big(x + n, (-1)^n y + m\big)$. Dann ist

$$G := \big\{f_{n,m} \,\big|\, n, m \in \mathbb{Z}\big\}$$

eine Gruppe bezüglich der Verknüpfung von Abbildungen. Man rechnet nun nach, dass $f_{n,m} \circ f_{n',m'} = f_{n+n',m+(-1)^n m'}$ gilt. Die kanonische Wirkung von G auf $\mathbb{R}^2$ gegeben durch $f_{n,m}.x := f_{n,m}(x)$ ist e.d.k., da

$$f_{n,m}\big(U_\varepsilon(x)\big) \cap U_\varepsilon(x) = \emptyset$$

für $(n, m) \neq (0, 0)$ und $\varepsilon < \frac{1}{2}$. Der Quotient $G\backslash\mathbb{R}^2 =: K$ heißt die ***Kleinsche Flasche***.Wir erhalten eine Überlagerung $\mathbb{R}^2 \to K$.

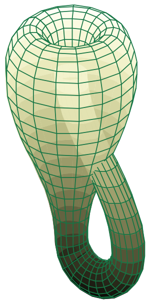


**Abbildung 8:** Kleinsche Flasche, `Quelle`

**12.4 Satz.** Sei $X$ wegzusammenhängend und einfach zusammenhängend. Sei $G \curvearrowright X$ eine e.d.k. Wirkung. Für jedes $\overline{x}_0 \in G\backslash X$ ist dann

$$\pi_1(G\backslash X, \overline{x}_0) \cong G$$

**Beweis:** Sei $x_0 \in X$ ein Urbild von $\overline{x}_0$, also $\overline{x}_0 = Gx_0$. Zu jeder Schleife $\omega\colon [0,1] \to G\backslash X$ mit $\omega(0) = \omega(1) = \overline{x}_0$ gibt es eine Hebung $\hat{\omega}\colon [0,1] \to X$ mit $\hat{\omega}(0) = x_0$. Hier heben wir bezüglich der Überlagerung $p\colon X \to G\backslash X$, $x \mapsto Gx$, also $p \circ \hat{\omega} = \omega$.

Da $p(\hat{\omega}(1)) = \omega(1) = \overline{x}_0$ folgt $\hat{\omega}(1) \in p^{-1}(\overline{x}_0) = Gx_0$. Es gibt also $g_\omega \in G$ mit $g_\omega \cdot x_0 = \hat{\omega}(1)$. Wie im Fall der Überlagerung $\mathbb{R} \to S^1$ zeigt man mit Hilfe des Homotopiehebungssatzes, dass $[\omega] \mapsto g_\omega^{-1}$ ein Gruppenhomomorphismus $\varphi\colon \pi_1(G\backslash X, \overline{x}_0) \to G$ definiert.

**Surjektivität von $\varphi$:** Sei $g \in G$. Sei $\hat{\omega}\colon [0,1] \to X$ ein Weg von $x_0$ nach $g \cdot x_0$ (Solch einen Weg gibt es, da $X$ wegzusammenhängend ist). Dann ist $\hat{\omega}$ die Hebung von $\omega := p \circ \hat{\omega}$ und es folgt $\varphi([\omega]) = g_\omega = g$, da $\hat{\omega}(1) = g \cdot x_0$. Also $g \in \operatorname{im} \varphi$.

**Injektivität von $\varphi$:** Sei $\omega := [0,1] \to G\backslash X$ eine Schleife mit $\omega(0) = \omega(1) = \overline{x}_0$, für die $\varphi([\omega]) = e$. Sei $\hat{\omega}\colon [0,1] \to X$ die Hebung von $\omega$ mit $\hat{\omega}(0) = x_0$. Da $\varphi([\omega]) = e$ ist, gilt $\hat{\omega}(1) = x_0$, $\hat{\omega}$ ist also eine Schleife in $X$. Da $X$ einfach zusammenhängend ist, ist $[\hat{\omega}] = e \in \pi_1(X, x_0)$. Es folgt

$$[\omega] = [p \circ \hat{\omega}] = p_*[\hat{\omega}] = p_*(e) = e. \qquad \square$$

**12.5 Bemerkung.** Für $n \geqslant 1$ ist $S^n$ wegzusammenhängend (einfache Übung). Für $n \geqslant 2$ ist $S^n$ einfach zusammenhängend (weniger einfache Übung).

Nach Satz 12.4 ist daher $\pi_1(\mathbb{R}P^n, x_0) = \mathbb{Z}/2$ für $n \geqslant 2$. Es folgt $\mathbb{R}P^n \not\cong S^n$ für $n \geqslant 2$. (Andererseits ist $\mathbb{R}P^1 \cong S^1$.)

**12.6 Definition.** Sei $p\colon \hat{X} \to X$ eine Überlagerung. Eine ***Decktransformation*** von $p$ ist ein Homöomorphismus $f\colon \hat{X} \to \hat{X}$, sodass $p \circ f = p$. Die Decktransformationen von $p$ bilden eine Gruppe $\Delta(p)$. Diese Gruppe wirkt in kanonischer Weise auf $\hat{X}$.

# 13 Klassifikation von Überlagerungen

**13.1 Definition.** Sei $G$ eine Gruppe. Eine $G$-Menge ist eine Menge mit einer Wirkung von $G$. Eine $G$-Menge $S$ heisst transitiv, wenn es zu $s, s' \in S$ immer $g \in G$ gibt mit $gs = s'$. Zu $s \in S$ heisst, $G_s := \{g \in G \mid g.s = s\}$ die ***Standgruppe*** von $s$. Eine $G$-Abbildung zwischen $G$-Mengen $S$ und $T$, ist eine Abbildung $f\colon S \to T$ die mit der $G$-Wirkung vertauscht, also $f(g.s) = g.f(s)$ für $g \in G$, $s \in S$. Wir schreiben $\mathrm{Map}_G(S,T)$ für die Menge aller $G$-Abbildungen von $S$ nach $T$.

**13.2 Bemerkung.** Ist $H$ eine Untergruppe von $G$, so bilden die Linksnebenklassen von $G$ nach $H$ eine $G$-Menge: $g.(aH) = gaH$. Diese $G$-Menge ist transitiv.

Sei umgekehrt $S$ eine transitive $G$-Menge und $s \in S$. Dann definiert $gG_s \mapsto gs$ eine bijektive $G$-Abbildung $G/G_s \to S$.

**13.3 Proposition.** Sei $p\colon Y \to X$ eine Überlagerung. Sei $x_0 \in X$ ein Basispunkt. Sei $\omega$ eine Schleife in $X$ bei $x_0$. Zu $y \in p^{-1}(x_0)$ sei der Weg $\tilde\omega_y$ in $Y$ bestimmt durch $\tilde\omega_y(0) = y$ und $p \circ \tilde\omega_y = \omega$.

Dann definiert $[\omega].y := \tilde\omega_y(1)$ eine Wirkung von $\pi_1(X;x_0)$ auf $p^{-1}(x_0)$.

**Beweis:** Nach dem Homotopiehebungssatz 10.7 existiert $\tilde\omega_y$ eindeutig. Da $p\circ\tilde\omega_y = \omega$ eine Schleife bei $x_0$ ist, gilt $\tilde\omega_y(1) \in p^{-1}(x_0)$. Wieder nach dem Homotopiehebungssatz 10.7 hängt $\tilde\omega_y(1)$ nur von $[\omega] \in \pi_1(X;x_0)$ ab. Seien $\omega$ und $\eta$ zwei Schleifen bei $x_0$. Zu $y \in p^{-1}(x_0)$ sei $y' := \tilde\eta_y(1)$. Dann ist $\rho := \tilde\omega_{y'} * \tilde\eta_y$ ein Weg mit $\rho(0) = y$ und $p \circ \rho = \omega * \eta$. Es folgt $[\omega * \eta].y = \rho(1) = \tilde\omega_{y'}(1) = [\omega].y' = [\omega].([\eta].y)$. □

**13.4 Definition.** Seien $p\colon Y \to X$ und $q\colon Z \to X$ zwei Überlagerungen. Mit $\mathrm{Map}_X(Y,Z)$ bezeichen wir die Menge aller stetigen Abbildungen $f\colon Y \to Z$ mit $q \circ f = p$. Die Überlagerungen $p$ und $q$ von $X$ heissen isomorph falls es $f \in \mathrm{Map}_X(Y,Z)$, $g \in \mathrm{Map}_X(Z,Y)$ gibt mit $f \circ g = \mathrm{id}_Z$, $g \circ f = \mathrm{id}_Y$.

**13.5 Satz.** Sei $X$ wegzusammenhängend und lokal wegzusammenhängend. Seien $p\colon Y \to X$ und $q\colon Z \to X$ zwei Überlagerungen. Dann ist die durch $f \mapsto f|_{p^{-1}(x_0}$ definierte Abbildung

$$\mathrm{Map}_X(Y,Z) \to \mathrm{Map}_{\pi_1(X;x_0)}(p^{-1}(x_0), q^{-1}(x_0))$$

bijektiv.

**13.6 Korollar.** Sei $X$ wegzusammenhängend und lokal wegzusammenhängend. Zwei Überlagerungen $p\colon Y \to X$ und $q\colon Z \to X$ sind genau dann isomorph, wenn $p^{-1}(x_0)$ und $q^{-1}(x_0)$ isomorph als $\pi_1(X;x_0)$-Mengen sind.

**Beweis** (von Satz 13.5)**:** Sei $f \in \mathrm{Map}_X(Y,Z)$. Wir überzeugen uns zunächst davon, dass $f|_{p^{-1}(x_0)}$ eine $\pi_1(X;x_0)$-Abbildung ist. Sei $g = [\omega] \in \pi_1(X;x_0)$ und $y_0 \in p^{-1}(x_0)$. Sei $\tilde\omega$ die eindeutige Hebung von $\omega$ zu einem Weg in $Y$, der in $y_0$ beginnt. Dann ist $g.y_0 = \tilde\omega(1)$. Weiter ist $f \circ \tilde\omega$ die eindeutige Hebung von $\omega$ zu einem Weg in $Z$, der in $f(y_0)$ beginnt. Daher ist $g.f(y_0) = f(\tilde\omega(1)) = f(g.y_0)$.

Zu $y \in Y$ sei $\omega$ ein Weg von $p(y)$ nach $x_0$ in $X$. Sei $\tilde\omega$ die eindeutige Hebung von $\omega$ zu einem Weg in $Y$, der in $y$ beginnt. Sei $y_0 \in p^{-1}(x_0)$ der Endpunkt von $\tilde\omega$. Dann ist $f \circ \tilde\omega$ die eindeutig Hebung von $\omega$ zu einem Weg in $Z$ der in $f(y_0)$ endet. Sein Anfangspunkt, $f(y)$, ist also schon durch $\omega$ und $f(y_0)$ eindeutig festgelegt. Folglich ist $f$ durch $f|_{p^{-1}(x_0)}$ schon eindeutig bestimmt.

Zur Surjektivität. Sei $f_0 \in \mathrm{Map}_{\pi_1(X;x_0)}(p^{-1}(x_0), q^{-1}(x_0))$ gegeben. Zu $y \in Y$ sei $\omega_y$ ein Weg von $p(y)$ zu $x_0$ in $X$. Sei $\tilde\omega_y$ die eindeutige Hebung von $\omega_y$ zu einem Weg in $Y$, der in $y$ beginnt. Sei $y_0 \in p^{-1}(x_0)$ der Endpunkt von $\tilde\omega_y$. Sei $\eta_y$ die eindeutige Hebung von $\omega$ zu einem Weg in $Z$, der in $f_0(y_0)$ endet. Wir setzen $f(y) := \eta_y(0)$. Es ist offenbar $q(f(y)) = p(y)$. Wir müssen zeigen, dass f wohldefiniert ist (also unabhängig von der Wahl von $\omega_y$ ist) und dass f stetig ist.

Zur Wohldefiniertheit. Sei $\omega'_y$ ein weitere Weg von $p(y)$ zu $x_0$ in X. Sei $\tilde{\omega}'_y$ die die eindeutige Hebung von $\omega'_y$ zu einem Weg in Y, der in y beginnt. Sei $y'_0$ der Endpunkt von $\tilde{\omega}'_y$. Sei $\eta'_y$ die eindeutige Hebung von $\omega'_y$ zu einem Weg in Z, der in $f_0(y'_0)$ endet. Zu zeigen ist $\eta'_y(0) = \eta_y(0)$.

Wir benutzten $\bar{\cdot}$ um umgekehrte Wege zu bezeichnen, also z.B. $\overline{\omega'_y}(t) = \omega'_y(1-t)$. Wir erhalten eine Schleife $\omega_y * \overline{\omega'_y}$ in X, die in $x_0$ startet und endet. Es ist $\tilde{\omega}_y * \overline{\tilde{\omega}'_y}$ die Hebung von $\omega_y * \overline{\omega'_y}$ mit Anfangspunkt $y'_0$. Daher gilt $g.y'_0 = y_0$ für $g := [\omega_y * \overline{\omega'_y}] \in \pi_1(X; x_0)$. Es folgt $g.f_0(y'_0) = f_0(g.y'_0) = f_0(y_0)$. Sei $\rho$ die Hebung von $\overline{\omega'_y} * \omega_y$ zu einem Weg in Z, der in $f_0(y'_0)$ beginnt. Der Endpunkt von $\rho$ ist dann $g.f_0(y'_0)$, also $f_0(y_0)$. Da $\eta_y$ eine Hebung von $\omega_y$ mit Endpunkt $f_0(y_0)$ ist und $\overline{\eta'_y}$ eine Hebung von $\overline{\omega'_y}$ mit Anfangspunkt $f_0(y'_0)$ folgt, dass $\rho$, nach Reparametrisierung, je zur Hälfte mit $\eta_y$ und $\overline{\eta'_y}$ übereinstimmt. Also

$$\rho(t) = \begin{cases} \overline{\eta'_y}(2t) & 0 \leqslant t \leqslant 1/2 \\ \eta_y(2t-1) & 1/2 \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}.$$

Insbesondere ist $\eta'_y(0) = \overline{\eta'_y}(1) = \eta_y(0)$.

Zur Stetigkeit. Sei $y \in Y$ und U eine offene Umgebung von $f(y)$ in Z. Da q eine Überlagerung ist, können wir, nach verkleinern von U, annehmen, dass $q|_U \colon U \to q(U)$ ein Homöomorphismus ist und $q(U)$ in X offen ist. Dann ist $q(U)$ eine offene Umgebung von $q(f(y)) = p(y)$ in X. Da p eine Überlagerung ist, gibt es eine offene Umgebung V von y mit $p(V) \subseteq f(U)$ so dass $p|_V \colon V \to p(V)$ ein Homöomorphismus ist und $p(V)$ in X offen ist. Da X lokal wegzusammenhängend ist, gibt es eine offene wegzusammenhängende Umgebung $W$ von $p(y)$ mit $W \subseteq p(V)$. Dann ist auch $V' := V \cap p^{-1}(W)$ eine offene wegzusammenhängende Umgebung von y.

Wir können nun zeigen: $f(V') \subseteq U$. Sei zunächst $\omega_y$ ein Weg von $p(y)$ nach $x_0$, $\tilde{\omega}_y$ eine Hebung von $\omega_y$ zu einem Weg in Y der in y beginnt, und $\eta_y$ eine Hebung von $\omega_y$ zu einem Weg in Z der in $f_0(\tilde{\omega}_y(1))$ endet. Dann ist $f(y)$ der Startpunkt von $\eta_y$. Zu $y' \in V'$ gibt es nun einen Weg $\tilde{\omega}^+_{y'}$ von $y'$ zu y in $V' \subseteq Y$. Sein Bild $\omega^+_{y'}$ in X hat eine Hebung $\eta^+_{y'}$ zu einem Weg in U, der in y endet. Nun ist, $\omega_{y'} := \omega_y * \omega^+_{y'}$ ein Weg von $p(y')$ nach $x_0$, $\tilde{\omega}_{y'} := \tilde{\omega}_y * \tilde{\omega}^+_{y'}$ eine Hebung von $\omega_{y'}$ zu einem Weg in Y der in $y'$ beginnt, und $\eta_{y'} := \eta_y * \eta^+_{y'}$ eine Hebung von $\omega_{y'}$ zu einem Weg in Z der in $f_0(\tilde{\omega}_{y'}(1))$ endet. Es ist also $f(y') = \eta_{y'}(0) = \eta^+_{y'}(0)$. Da $\eta^+_{y'}$ ein Weg in U ist, ist $f(y') \in U$. □

**13.7 Satz.** Sei X wegzusammenhängend, lokal wegzusammenhängend und lokal einfach zusammenhängend. Sei $x_0 \in X$ ein Basispunkt. Dann gibt es eine wegzusammenhängende und einfach zusammenhängende Überlagerung $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$. Weiter gibt es eine eigentlich diskontinuierliche Wirkung von $\pi_1(X; x_0)$ auf $\tilde{X}$, so dass p einen Homöomorphismus $\pi_1(X; x_0)\backslash\tilde{X} \to X$ induziert. Sie ist frei und transitiv.

**Beweis** (Skizze): Sei $x_0 \in X$. Sei $P = \{\omega \colon [0,1] \to X \text{ Weg} \mid \omega(1) = x_0\}$. Sei

$$\tilde{X} := P/\text{Homotopie mit festen Endpunkten}$$

Dann induziert $\omega \mapsto \omega(0)$ eine wohldefinierte Abbildung $p \colon \tilde{X} \to X$. Sei $\omega \in P$ und V eine wegzusammenhängende, einfach zusammenhängende Umgebung von $\omega(0)$ in X. Setze

$$U(V, \omega) = \{[\omega * \eta] \mid \eta \colon [0,1] \to V \text{ Weg mit } \eta(1) = \omega(0)\}$$

Die $U(V, \omega)$ bilden die Basis der Topologie von $\tilde{X}$. Da V wegzusammenhängend und einfach zusammenhängend ist, ist

$$p\Big|_{U(V,\omega)} \colon U(V, \omega) \to V$$

bijektiv. Da X lokal wegzusammenhängend und lokal einfach zusammenhängend ist, ist $p|_{U(V,\omega)}$ sogar ein Homöomorphismus. Damit ist V eine elementare Umgebung von $\omega(0)$. Da X wegzusammenhängend ist, ist p auch surjektiv und $p\colon \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung.

Wir zeigen, dass $\tilde{X}$ wegzusammenhängend ist: Sei $\tilde{x}_0 \colon [c_{x_0}] \in \tilde{X}$. Sei $\tilde{x} = [\omega] \in \tilde{X}$. Sei $\omega_s \colon [0,1] \to X$ mit

$$\omega_s(t) = \begin{cases} \omega(t), & \text{falls } t \geqslant s \\ \omega(s), & \text{falls } t \leqslant s \end{cases}$$

Dann ist $\alpha\colon [0,1] \to \tilde{X}$ mit $\alpha(s) = [\omega_s]$ ein Weg von $\tilde{x}_0$ nach $\tilde{x}$. Damit ist $\tilde{X}$ wegzusammenhängend. Dass $\tilde{X}$ einfach zusammenhängend ist, zeigen wir an dieser Stelle nicht.

Die Wirkung von $\pi_1(X; x_0)$ auf $\tilde{X}$ ist wie folgt definiert. Sei $\eta$ eine Schleife in X am Basispunkt $x_0$. Sei $\omega$ eine Weg in X mit Endpunkt $x_0$. Die Wirkung ist definiert durch $[\eta].[\omega] := [\eta * \omega]$. Wir weisen hier nicht nach, dass diese Wirkung die behaupteten Eigenschaften hat. □

**13.8 Definition.** Die Überlagerung $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$ aus Satz 13.7 heißt die ***universelle Überlagerung*** von X.

**13.9 Satz.** Sei X wegzusammenhängend, lokal wegzusammenhängend und lokal einfach zusammenhängend. Sei S eine $\pi_1(X; x_0)$-Menge. Dann gibt es eine Überlagerung $q\colon Y \to X$, so dass $p^{-1}(x_0)$ und S als $\pi_1(X; x_0)$-Mengen isomorph sind.

**Beweis** (Skizze): Sei $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$ die universelle Überlagerung. Auf $\tilde{X} \times S$ betrachte die durch

$$(x,s) \sim (x',s') :\Longleftrightarrow \exists g \in \pi_1(X; x_0) \text{ with} (x,s) = (gx', g^{-1}s')$$

definierte Äquivalenzrelation. Die Abbildung $\tilde{X} \times S \to X$ definiert durch $(x,s) \mapsto p(x)$ induziert eine Abbildung $q\colon Y := \tilde{X} \times S/\sim \to X$ ; dies ist die gesucht Überlagerung. □

**13.10 Bemerkung.** In der Sprache der Kategorien und Funktoren lassen sich die Aussagen von Satz 13.5 und Satz 13.9 wie folgt zusammenfassen.

Sei X wegzusammenhängend, lokal wegzusammenhängend und lokal einfach zusammenhängend. Dann ist der Funktor $(p\colon Y \to X) \mapsto p^{-1}(x_0)$ eine Äquivalenz von der Kategorie der Überlagerungen von X in die Kategorie der $\pi_1(X; x_0)$-Mengen.

Streng genommen enthält Satz 13.5 etwas mehr Information, da wir dort nicht annehmen mussten, dass X lokal einfach zusammenhängend ist.

**13.11 Satz** (Hebungssatz). Sei $p\colon \hat{X} \to X$ eine Überlagerung. Sei $x_0 \in X, \hat{x}_0 \in \hat{X}$, $p(\hat{x}_0) = x_0$. Sei Z wegzusammenhängend und lokal wegzusammenhängend. Sei $z_0 \in Z$, $f\colon Z \to X$ stetig mit $f(z_0) = x_0$. Dann gibt es eine Hebung $\hat{f}\colon Z \to \hat{X}$ mit $\hat{f}(z_0) = \hat{x}_0$ genau dann, wenn

$$f_*\big(\pi_1(Z, z_0)\big) \subseteq p_*\big(\pi_1(\hat{X}, \hat{x}_0)\big) \qquad [\star]$$

als Untergruppe von $\pi_1(X, x_0)$ gilt. In diesem Fall ist $\hat{f}$ eindeutig.

$$\begin{tikzcd} X & \hat{X} \arrow[l, "p"'] \\ Z \arrow[u, "f"] \arrow[ur, dashed, "\hat{f}"'] \end{tikzcd}$$

**Beweis:** Übung. □

# 14 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

Sei $M$ eine topologische Mannigfaltigkeit. Welche Funktionen $f\colon M \to \mathbb{R}$ sind differenzierbar? Was sind Richtungsableitungen für solche Funktionen? Was sind Richtungen in $M$?

Da topologische Mannigfaltigkeiten lokal homöomorph zum $\mathbb{R}^n$ wäre folgendes ein naheliegender Ansatz für eine Definition im obigen Sinne: $f\colon M \to \mathbb{R}$ heißt $C^\infty$ genau dann, wenn

$$\forall x \in M : \exists U \subseteq M \text{ offen mit } x \in U \text{ und } h\colon U \xrightarrow{\approx} V \subseteq \mathbb{R}^n : f \circ h^{-1} : V \to \mathbb{R} \text{ ist } C^\infty$$

Dieser Ansatz hat aber noch die folgenden Probleme:

**a)** Ob $f \circ h^{-1}\colon V \to \mathbb{R}$ $C^\infty$ ist oder nicht, hängt von der Wahl von $h$ ab.

**b)** Jeder Homöomorphismus $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist in dieser Definition $C^\infty$!

**14.1 Definition.** Sei $M^n$ eine topologische $n$-Mannigfaltigkeit.

**a)** Eine ***Karte*** für $M$ ist ein Homöomorphismus $h\colon U \xrightarrow{\approx} V$ mit $U \subseteq M$ offen, $V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. $U$ heißt das ***Kartengebiet*** von $h$. Ist $x \in U$, so heißt $h$ eine ***Karte um*** $x$.

**b)** Sind $h_i\colon U_i \xrightarrow{\approx} V_i$, $i = 0, 1$ zwei Karten, so heißt

$$h_1 \circ h_0^{-1}\big|_{h_0(U_0 \cap U_1)} \colon \underbrace{h_0(U_0 \cap U_1)}_{\subseteq V_0 \subseteq \mathbb{R}^n} \to \underbrace{h_1(U_0 \cap U_1)}_{\subseteq V_1 \subseteq \mathbb{R}^n}$$

der ***Kartenwechsel*** zwischen $h_0$ und $h_1$. Ein Kartenwechsel ist ein Homöomorphismus zwischen offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$.

**c)** Eine Menge von Karten $\{h_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha | \alpha \in A\}$ heißt ein ***Atlas*** für $M$, wenn die Kartengebiete $U_\alpha$ die Mannigfaltigkeit überdecken: $M = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$

**d)** Ein Atlas $\mathcal{A}$ heißt $C^\infty$ (oder ***glatt***), wenn alle Kartenwechsel zwischen Karten aus $\mathcal{A}$ $C^\infty$-Abbildungen sind.

**14.2 Definition.** Eine ***$C^\infty$-Mannigfaltigkeit*** ist eine topologische Mannigfaltigkeit zusammen mit einem $C^\infty$-Atlas $\mathcal{A}$.

**14.3 Beispiel.** Viele interessante topologische Räume sind differenzierbare Mannigfaltigkeiten:

**(1)** $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen ist eine $C^\infty$-Mannigfaltigkeit mit Atlas $\{\mathrm{id}_U\}$.

**(2)** $S^n$ ist eine $C^\infty$-Mannigfaltigkeit: Definiere Kartengebiete $U_{k,j} := \{x \in S^n \mid (-1)^j x_k > 0\}$ für $k = 0, \ldots, n$, $j = 0, 1$. Sei

$$h_{k,j}\colon U_{k,j} \to \mathring{D}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 < 1\}$$

mit

$$h_{k,j}(x_0, \ldots, x_n) = (x_0, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n)$$

Dann ist $\mathcal{A} = \{h_{k,j} \mid k = 0, \ldots, n \;\; j = 0, 1\}$ ein $C^\infty$-Atlas für $S^n$.

**(3)** $\mathbb{R}P^n = {}^{S^n}/_{x \sim -x}$ ist eine $C^\infty$-Mannigfaltigkeit: Setze

$$U_k := \{[(x_0, \ldots, x_n)] \in \mathbb{R}P^n \mid x_k \neq 0\}$$

und definiere $h_k\colon U_k \to \mathring{D}^n$ durch

$$h_k([x_0, \ldots, x_n]) = \frac{x_k}{|x_k|}(x_0, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n)$$

Dann ist $\{h_k \mid k = 0, \ldots, n\}$ ein $C^\infty$-Atlas für $\mathbb{R}P^n$.

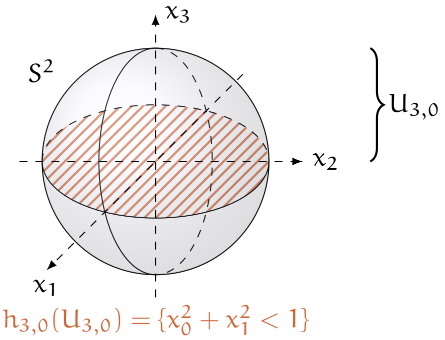



**Abbildung 9:** Die $C^\infty$-Mannigfaltigkeit $S^2$ mit dem Kartengebiet $U_{3,0}$

**(4)** Sind $(M, \mathcal{A})$ und $(N, \mathcal{B})$ $C^\infty$-Mannigfaltigkeiten, so ist $\{h \times k \mid h \in \mathcal{A}, k \in \mathcal{B}\}$ ein $C^\infty$-Atlas für $M \times N$.

**14.4 Bemerkung.** Sei $(M, \mathcal{A})$ eine $C^\infty$-Mannigfaltigkeit. Eine Karte $h \colon U \to V$ für $M$ (nicht notwendig in $\mathcal{A}$) heißt eine $C^\infty$-Karte, wenn alle Kartenwechsel zwischen $h$ und einer Karte aus $\mathcal{A}$ $C^\infty$ sind. Offenbar besteht $\mathcal{A}$ aus $C^\infty$-Karten. Es ist auch $\mathcal{A}_{max} := \{h \mid h \text{ ist } C^\infty\text{-Karte}\}$ ein $C^\infty$-Atlas für $M$. Dieser Atlas ist maximal, d.h. man kann keine weiteren Karten zu $\mathcal{A}_{max}$ hinzufügen und immer noch einen $C^\infty$-Atlas erhalten.

**14.5 Definition.** Seien $M, N$ $C^\infty$-Mannigfaltigkeiten. Sei $f \colon M \to N$ eine stetige Abbildung.

**a)** Sei $x \in M$. $f$ heißt $C^\infty$ oder ***glatt*** in $x$, wenn es eine Karte $h_0 \colon U_0 \to V_0$ von $M$ um $x$ und eine Karte $h_1 \colon U_1 \to V_1$ von $N$ um $f(x)$ gibt, sodass

$$h_1 \circ f \circ h_0^{-1}$$

auf einer Umgebung von $h_0(x)$ eine $C^\infty$-Abbildung ist.

**b)** Ist $f$ in allen $x \in M$ glatt, so heißt $f$ eine $C^\infty$***-Abbildung***. Wir schreiben $C^\infty(M, N)$ für die Menge der $C^\infty$-Abbildungen von $M$ nach $N$.

**c)** $M$ und $N$ heißen ***diffeomorph***, wenn es $f \in C^\infty(M, N)$ und $g \in C^\infty(N, M)$ gibt mit $f \circ g = \mathrm{id}_N$ und $g \circ f = \mathrm{id}_M$.

In diesem Fall heißen $f$ und $g$ ***Diffeomorphismen***.

Ein etwas künstliches Beispiel: $(M, \mathcal{A})$ und $(M, \mathcal{A}_{max})$ sind diffeomorph mittels der Identität $\mathrm{id}_M \colon (M, \mathcal{A}) \to (M, \mathcal{A}_{max})$.

**14.6 Bemerkung.** **a)** Ist $f \colon M \to N$ glatt in $x$, so ist $h_1 \circ f \circ h_0^{-1}$ glatt in einer Umgebung von $h_0(x)$ für *alle* Wahlen von $C^\infty$-Karten $h_0$ um $x$ und $h_1$ um $f(x)$.

**b)** Die Komposition von $C^\infty$-Abbildungen ist wieder eine $C^\infty$-Abbildung.

**c)** Ist $f \colon M \to N$ bijektiv und $C^\infty$ ist, so ist $f$ noch nicht notwendigerweise ein Diffeomorphismus. (betrachte z.B. $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$)

**14.7 Bemerkung.** Beim Unterscheiden zwischen Homöomorphismen und Diffeomorphismen ist Vorsicht geboten:

**a)** Es gibt $C^\infty$-Mannigfaltigkeiten $M$ und $N$, sodass $M$ und $N$ zueinander homöomorph sind, aber nicht diffeomorph sind. Dabei kann man sogar $M = S^7$ wählen.

**b)** Es gibt topologische Mannigfaltigkeiten, auf denen kein $C^\infty$-Atlas existiert.

Diese Aussagen liegen aber weit ausserhalb der Reichweite dieser Vorlesung.

**14.8 Definition.** Eine Teilmenge $N \subseteq M^{n+k}$ einer $(n+k)$-dimensionalen $C^\infty$-Mannigfaltigkeit $M$, heißt eine $n$-dimensionale $C^\infty$-***Untermannigfaltigkeit***, wenn es um jedes $x \in N$ eine Karte $h\colon U \to V \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$ für $M$ gibt, so dass $h(N \cap U) = V \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})$. $k = \dim M - \dim N$ heißt die ***Kodimension*** von $N$ in $M$. Durch Einschränkung dieser Karten von $M$ auf $N$ erhalten wir einen $C^\infty$-Atlas für $N$. Insbesondere ist $N$ eine $n$-dimensionale $C^\infty$-Mannigfaltigkeit.

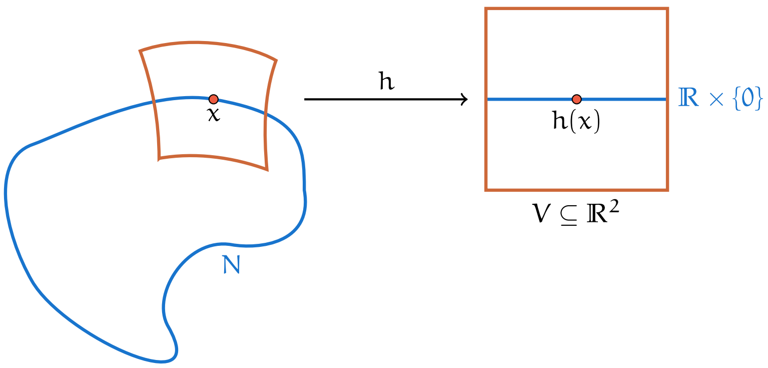



**Abbildung 10:** Skizze einer Untermannigfaltigkeit $N$ der Mannigfaltigkeit $M = \mathbb{R}^2$

**14.9 Definition.** Eine $C^\infty$-Abbildung $f\colon N \to M$ heißt eine ***Einbettung***, wenn $f(N) \subseteq M$ eine $C^\infty$-Untermannigfaltigkeit ist und $f\colon N \to f(N)$ ein Diffeomorphismus ist.

# 15 Reguläre Werte

Man betrachte, die in Abbildung 11 gezeichnete Höhenfunktion auf dem Torus $T^2$. Wie angedeutet, scheinen die Urbilder einzelner Punkte Mannigfaltigkeiten zu sein, die entweder $S^1$ oder eine disjunkte Vereinigung von zwei Kopien der $S^1$ sind. An zwei Punkten (einer davon der grün gezeichnete) findet ein Wechsel zwischen diesen beiden Typen von Urbildern statt und das Urbild ist `keine` Mannigfaltigkeit, da eine Umgebung des Klebepunktes der beiden 1-Sphären nicht homöomorph zum $\mathbb{R}^1$ ist.

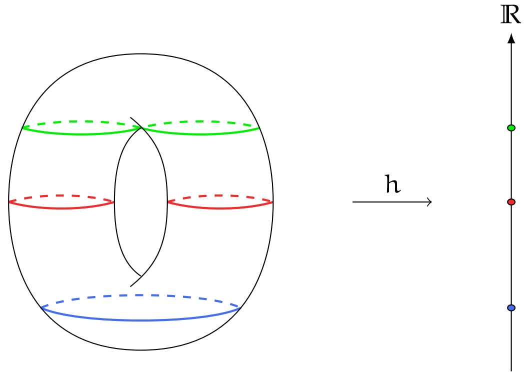



**Abbildung 11:** Höhenfunktion beim $T^2$ Torus

**15.1 Definition.** Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ eine $C^\infty$-Abbildung. Für $x \in U$ sei $Df_x\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ das ***Differential*** von f in x. Der Rang der linearen Abbildung $Df_x\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ heißt der ***Rang*** von f in x.

**15.2 Definition.** Seien $N^n$ und $M^m$ glatte Mannigfaltigkeiten mit $\dim N = n, \dim M = m$. Sei $f\colon N \to M$ glatt und $x \in N$. Seien $h_0\colon U_0 \to V_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ und $h_1\colon U_1 \to V_1 \subseteq \mathbb{R}^m$ Karten von N um x und M um $f(x)$. Der ***Rang*** von f in x ist erklärt als

$$\mathrm{Rg}_x f := \mathrm{Rang}\Big(D(h_1 \circ f \circ h_0^{-1})_{h_0(x)}\Big).$$

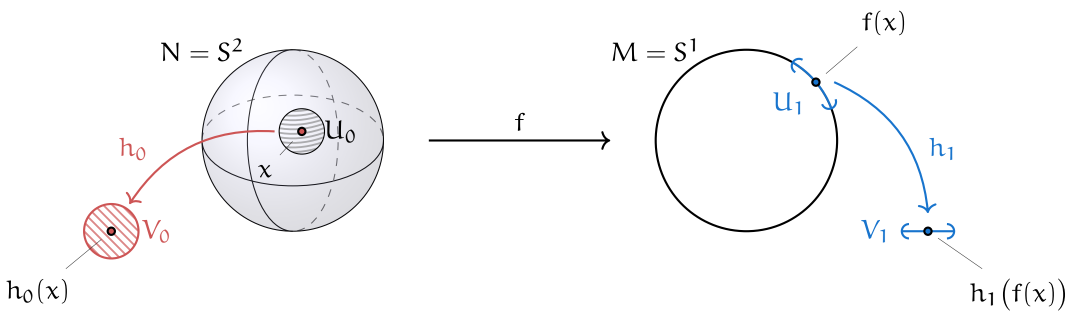



**Abbildung 12:** Diagramm zur Definition des Ranges einer glatten Abbildung $f\colon N \to M$

**15.3 Lemma.** Sind $\hat{h}_0 \colon \hat{U}_0 \to \hat{V}_0$ und $\hat{h}_1 \colon \hat{U}_1 \to \hat{V}_1$ zwei weitere Karten um $x$ und $f(x)$, so gilt:

$$\operatorname{Rang}\Big(D(h_1 \circ f \circ h_0^{-1})_{h_0(x)}\Big) = \operatorname{Rang}\Big(D(\hat{h}_1 \circ f \circ \hat{h}_0^{-1})_{\hat{h}_0(x)}\Big)$$

Insbesondere hängt $\operatorname{Rg}_x f$ nicht von der Wahl von Karten ab.

**Beweis:** Es gilt

$$\begin{aligned}D(\hat{h}_1 \circ f \circ \hat{h}_0^{-1})_{\hat{h}_0(x)} &= D(\hat{h}_1 \circ h_1^{-1} \circ h_1 \circ f \circ h_0^{-1} \circ h_0 \circ \hat{h}_0^{-1})_{\hat{h}_0(x)} \\ &= D(\hat{h}_1 \circ h_1^{-1})_{h_1(f(x))} \circ D(h_1 \circ f \circ h_0^{-1})_{h_0(x)} \circ D(h_0 \circ \hat{h}_0^{-1})_{\hat{h}_0(x)}\end{aligned}$$

Da $\hat{h}_1 \circ h_1^{-1}$ und $h_0 \circ \hat{h}_0^{-1}$ Diffeomorphismen (um $h_1(f(x))$ bzw. $\hat{h}_0(x)$) sind, sind die Differentiale $D(\hat{h}_1 \circ h_1^{-1})_{h_1(f(x))}$ und $D(h_0 \circ \hat{h}_0^{-1})_{\hat{h}_0(x)}$ invertierbar. Es folgt die Behauptung. $\square$

**15.4 Definition.** Sei $f \colon N \to M$ eine $C^\infty$-Abbildung.

**a)** $x \in N$ heißt ***regulär*** für $f$, wenn $\operatorname{Rg}_x f = \dim M$.

**b)** $y \in M$ heißt ein ***regulärer Wert*** für $f$, falls alle $x \in f^{-1}(y)$ regulär sind.

**15.5 Satz** (über reguläre Werte)**.** Sei $f \colon N \to M$ eine $C^\infty$-Abbildung und $y \in M$ ein regulärer Wert. Dann ist $f^{-1}(y)$ eine Untermannigfaltigkeit der Kodimension $\dim M$ von $N$.

**15.6 Beispiel.** Sei $O(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A^t \cdot A = \mathbb{1}_n\}$ die Gruppe der orthogonalen $n \times n$-Matrizen. Sei

$$S = \left\{B \in \mathbb{R}^{n\times n} \,\middle|\, B = B^t\right\}$$

Dann ist $S \cong \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$. Nun ist $f \colon \mathbb{R}^{n\times n} \to S$ mit $f(A) = A^t \cdot A$ eine $C^\infty$-Abbildung und es ist $O(n) = f^{-1}(\mathbb{1}_n)$. Behauptung: $\mathbb{1}_n$ ist regulärer Wert von $f$ und somit folgt, dass $O(n)$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n\times n} \cong \mathbb{R}^{n^2}$ ist.

**Beweis:** Sei $A \in O(n)$ und $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Für $\lambda \in \mathbb{R}$ ist dann

$$\begin{aligned}f(A + \lambda B) = (A + \lambda B)^t(A + \lambda B) &= A^tA + \lambda B^tA + \lambda A^tB + \lambda^2 B^tB \\ &= A^tA + \lambda(B^tA + A^tB) + \lambda^2 B^tB.\end{aligned}$$

Es folgt, dass die Richtungsableitung in Richtung $B$ von $f$ in $A$ genau $B^tA + A^tB$ ist. Die Richtungsableitungen von $f$ sind genau das Bild des Differentials von $f$ in $A$. Für $C \in S$ ist mit $B := \frac{1}{2}A \cdot C$, $C = B^tA + A^tB$. Also ist das Differential surjektiv und $A$ regulär für $f$. $\square$

**15.7 Satz** (über implizite Funktionen)**.** Seien $U_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ und $U_2 \subseteq \mathbb{R}^m$ offen. Seien $x_1 \in U_1$, $x_2 \in U_2$ und $f \colon U_1 \times U_2 \to \mathbb{R}^m$ eine $C^\infty$-Abbildung, für die

$$Df_{(x_1,x_2)}\Big|_{\{0\}\times\mathbb{R}^m}$$

invertierbar ist. Dann gibt es eine $C^\infty$-Abbildung $g \colon V_1 \to V_2$ mit $x_1 \in V_1 \subseteq U_1$, $x_2 \in V_2 \subseteq U_2$, $g(x_1) = x_2$ und

$$\left\{(y_1, y_2) \in V_1 \times V_2 \,\middle|\, f(y_1, y_2) = f(x_1, x_2)\right\} = \left\{(y_1, g(y_1)) \,\middle|\, y_1 \in V_1\right\}$$

**15.8 Satz** (von der Umkehrfunktion). Seien $U_1, U_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Sei $x \in U_1$ und $f\colon U_1 \to U_2$ eine $C^\infty$-Abbildung für die $Df_x$ ein Isomorphismus ist. Dann gibt es offene Umgebungen $V_1 \subseteq U_1$ von $x$ und $V_2 \subseteq U_2$ von $f(x)$, so dass $f|_{V_1}\colon V_1 \to V_2$ ein Diffeomorphismus ist.

**Beweis** (des Satzes über reguläre Werte 15.5): Sei $x \in f^{-1}(y)$. Wir müssen zeigen, dass eine Karte $\varphi\colon U \to V \subseteq \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$ um $x$ existiert mit

$$\{u \in U \mid f(u) = y\} = \{\varphi^{-1}(x,0) \mid (x,0) \in V\}$$

Da es Karten um $x$ und $y$ gibt, können wir o.B.d.A. annehmen, dass $N \subseteq \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$ und $M \subseteq \mathbb{R}^m$ offene Teilmengen sind. Weiter können wir annehmen, dass $x = 0, y = 0$ gilt. Nach Voraussetzung ist $Df_0\colon \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ surjektiv. Indem wir $f$ – falls nötig – um einen linearen Isomorphismus von $\mathbb{R}^{k+m} = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$ ändern, können wir erreichen, dass $Df_0(\{0\} \times \mathbb{R}^m) = \mathbb{R}^m$ gilt.

Seien nun $0 \in U_1 \subseteq \mathbb{R}^k$ und $0 \in U_2 \subseteq \mathbb{R}^m$ offen mit $U_1 \times U_2 \subseteq N$. Mit dem Satz über implizite Funktionen folgt, dass offene Menge $V_1, V_2$ existieren mit $0 \in V_1 \subseteq U_1$, $0 \in V_2 \subseteq U_2$ und eine $C^\infty$-Abbildung $g\colon V_1 \to V_2$, sodass gilt: Für $(x_1, x_2) \in V_1 \times V_2$ ist

$$f(x_1, x_2) = 0 \iff x_2 = g(x_1).$$

Betrachte nun

$$\begin{tikzcd} V_1 \times V_2 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"] & M \\ \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m & \end{tikzcd}$$

mit $\varphi(x_1, x_2) = \big(x_1, x_2 - g(x_1)\big)$. Für $(x_1, x_2) \in V_1 \times V_2$ gilt dann

$$f(x_1, x_2) = 0 \iff \varphi(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^k \times \{0\}.$$

Weiter ist $D\varphi_0 = \left(\begin{smallmatrix} \mathrm{id} & 0 \\ -Dg_0 & \mathrm{id} \end{smallmatrix}\right)$ invertierbar. Mit dem Satz von der Umkehrfunktion folgt wieder die Existenz offener Umgebungen $0 \in U \subseteq V_1 \times V_2$ und $0 \in V \subseteq \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$, sodass $\varphi\big|_U\colon U \to V$ ein Diffeomorphismus ist. Dies ist die gesuchte Karte. $\square$

**15.9 Bemerkung.** Nach dem Satz von Sard ist die Menge der ***kritischen Werte***, also der nicht regulären Werte einer $C^\infty$-Abbildung $f\colon N \to M$ eine Menge mit Lebesgue-Maß Null. Insbesondere gibt es immer reguläre Werte.

# 16 Approximation durch $C^\infty$-Abbildungen

**16.1 Proposition.** Sei $M$ eine $C^\infty$-Mannigfaltigkeit. Dann ist $C_0^\infty(M,\mathbb{R}) := C^\infty(M,\mathbb{R}) \cap C_0(M,\mathbb{R})$ dicht in $C_0(M,\mathbb{R})$ bezüglich $\|.\|_\infty$.

**16.2 Beispiel** (Glockenfunktionen). Seien $\psi, \varphi_\varepsilon \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ für $\varepsilon > 0$ gegeben durch

$$\psi(t) := \begin{cases} 0, & \text{falls } t \leqslant 0 \\ e^{-t^{-2}}, & \text{falls } t > 0 \end{cases} \quad , \quad \varphi_\varepsilon(t) = \frac{\psi(t)}{\psi(t) + \psi(\varepsilon - t)}$$

$\psi$ und $\varphi_\varepsilon$ sind $C^\infty$-Funktionen. Für $r > 0$ sei nun eine weitere Familie von Funktionen $f_{\varepsilon,r} \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

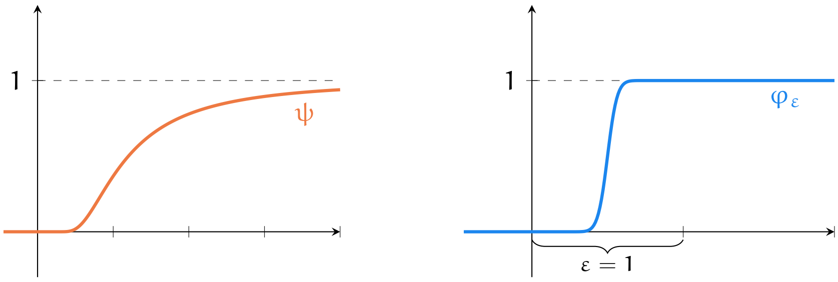



**Abbildung 13:** Die Funktionen $\psi$ und $\varphi_\varepsilon$ für $\varepsilon = 1$

gegeben durch $f_{\varepsilon,r}(x) = 1 - \varphi_\varepsilon(\|x\| - r)$. Es ist $f_{\varepsilon,r} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ und es gilt $f_{\varepsilon,r}(x) \subseteq [0,1]$ für alle

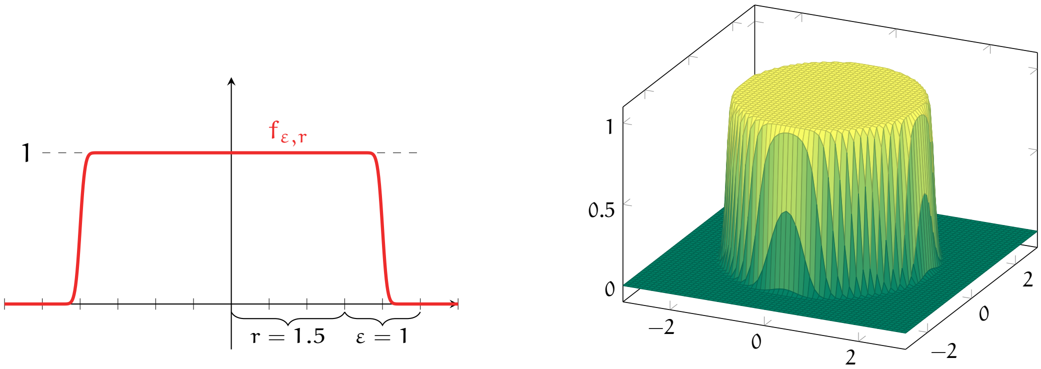



**Abbildung 14:** Glockenfunktion $f_{\varepsilon,r}$ für $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^2$, wobei $\varepsilon = 1$, $r = 1.5$

$x \in \mathbb{R}^n$. Weiter ist $f_{\varepsilon,r}(x) = 1$ für $|x| \leqslant r$, $f_{\varepsilon,r}(x) = 0$ für $|x| \geqslant r + \varepsilon$. Abbildung 14 zeigt eine der Funktionen für $n = 1$ und eine für $n = 2$.

**Beweis** (von Proposition 16.1): Wir wollen den Approximationssatz von Stone-Weierstraß (6.6) anwenden: Dazu müssen wir zeigen:

$$\forall x, y \in M : \exists f \in C_0^\infty(M,\mathbb{R}) \text{ mit } f(x) \neq f(y) \text{ und } f(x) \neq 0 \neq f(y)$$

Wähle dazu Karten $\varphi \colon U \to V$ und $\hat{\varphi} \colon \hat{U} \to \hat{V}$ von $M$ mit $x \in U$, $y \in \hat{U}$ und $U \cap \hat{U} = \emptyset$. Indem wir, wenn nötig, einen Isomorphismus von $\mathbb{R}^n$ anwenden, können wir außerdem fordern, dass $\varphi(x) = 0$, $\hat{\varphi}(y) = 0$, $B_2(0) \subseteq V$ und $B_2(0) \subseteq \hat{V}$ gilt. Dann ist $f_x \in C_0^\infty(M,\mathbb{R})$ mit

$$f_x(z) = \begin{cases} 0, & \text{falls } z \notin U \\ f_{1/2,1}\big(\varphi(z)\big), & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann gilt $f_x(x) = 1$ und $f_x(y) = 0$. Ebenso gibt es $f_y \in C_0^\infty(M, \mathbb{R})$ mit $f_y(x) = 0$ und $f_y(y) = 1$. Nun ist $f := 2f_x + f_y$ die gesuchte Funktion. □

**16.3 Korollar.** Sei $M$ eine kompakte $C^\infty$-Mannigfaltigkeit und $\varphi\colon M \to \mathbb{R}^n$ stetig. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine $C^\infty$-Abbildung $f\colon M \to \mathbb{R}^n$ mit $\|\varphi(x) - f(x)\|_2 \leqslant \varepsilon$ für alle $x \in M$.

**Beweis:** Schreibe $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ und approximiere die $\varphi_i$ durch $C^\infty$-Funktionen. □

**16.4 Korollar.** Sei $M$ eine kompakte $C^\infty$-Mannigfaltigkeit und $\varphi\colon M \to S^n$ stetig. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine $C^\infty$-Abbildung $f\colon M \to S^n$ mit $\|f(x) - \varphi(x)\|_2 \leqslant \varepsilon$ für alle $x \in M$.

**Beweis:** Da $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, gibt es nach Korollar 16.3 eine $C^\infty$-Abbildung $f_0\colon M \to \mathbb{R}^{n+1}$ mit $\|f_0(x) - \varphi(x)\|_2 \leqslant \varepsilon\ \ \forall x \in M$. O.B.d.A. sei $\varepsilon < 1$. Wegen $\varphi(x) \in S^n$ folgt

$$1 - \varepsilon \leqslant \|f_0(x)\|_2 \leqslant 1 + \varepsilon$$

Sei $f\colon M \to S^n$ die durch $f(x) := \frac{f_0(x)}{\|f_0(x)\|_2}$ definierte $C^\infty$-Abbildung. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\|f(x) - \varphi(x)\|_2 &\leqslant \|f(x) - f_0(x)\|_2 + \|f_0(x) - \varphi(x)\|_2 \\
&\leqslant \left\| \frac{f_0(x)}{\|f_0(x)\|_2} - f_0(x) \right\|_2 + \varepsilon \\
&= \left| 1 - \frac{1}{\|f_0(x)\|_2} \right| \cdot \|f_0(x)\|_2 + \varepsilon \\
&= \left| \frac{\|f_0(x)\|_2 - 1}{\|f_0(x)\|_2} \right| \cdot \|f_0(x)\|_2 + \varepsilon \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon}(1 + \varepsilon) + \varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0
\end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung. □

**16.5 Bemerkung.** Allgemein lässt sich jede stetige Abbildung zwischen $C^\infty$-Mannigfaltigkeiten durch $C^\infty$-Abbildungen approximieren. Dazu zeigt man:

**(i)** Jede (kompakte) $C^\infty$-Mannigfaltigkeit lässt sich in den $\mathbb{R}^N$ für $N \gg \dim M$ einbetten.

**(ii)** $M \subseteq \mathbb{R}^N$ besitzt eine ***Tubenumgebung***[2]. Dies erlaubt es, eine $C^\infty$-Retraktion $K \to M$ auf einer kompakten Umgebung $K$ von $M \subseteq \mathbb{R}^N$ zu konstruieren.

**16.6 Proposition.** Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ eine $C^\infty$-Abbildung. Ist $m > n$, so ist $f(U) \subseteq \mathbb{R}^m$ eine Nullmenge bezüglich des Lebesgue-Maßes.

**Beweis:** Jede offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist die abzählbare Vereinigung von kompakten Teilmengen. Die abzählbare Vereinigung von Nullmengen ist wieder eine Nullmenge. Daher genügt es zu zeigen: Ist $K \subseteq U$ kompakt, so ist $f(K) \subseteq \mathbb{R}^m$ eine Nullmenge.

Da $K$ kompakt ist , ist $\|Df_x\|$ für $x \in K$ beschränkt. Insbesondere ist $f$ auf $K$ Lipschitz-stetig. Es gibt also $\alpha > 0$ mit

$$\forall \varepsilon > 0 : f(B_\varepsilon(x) \cap K) \subseteq B_{\alpha\varepsilon}\big(f(x)\big)$$

[2] Wikipedia: `https://de.wikipedia.org/wiki/Tubulare_Umgebung`

Sei nun $R > 0$ mit $K \subseteq [-R, R]^n$. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es dann eine Überdeckung von $K$ durch $\left(2\left\lceil\frac{R}{\varepsilon}\right\rceil\right)^n$ viele Bälle $B_\varepsilon(x_i) \subseteq \mathbb{R}^n$. Es folgt

$$\mathrm{Vol}_{\mathbb{R}^m}\big(f(K)\big) \leqslant \left(2\left\lceil\frac{R}{\varepsilon}\right\rceil\right)^n \cdot \mathrm{Vol}_{\mathbb{R}^m}\big(B_{\alpha\varepsilon}(0)\big) = \left(2\left\lceil\frac{R}{\varepsilon}\right\rceil\right)^n \cdot (\alpha\varepsilon)^m \cdot C_m$$

mit $C_m := \mathrm{Vol}_{\mathbb{R}^m}\big(B_1(0)\big)$. Wegen $m > n$ gilt $\left(2\left\lceil\frac{R}{\varepsilon}\right\rceil\right)^n \cdot (\alpha\varepsilon)^m \cdot C_m \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0$. Also $\mathrm{Vol}_{\mathbb{R}^m}\big(f(K)\big) = 0$. □

**16.7 Korollar.** Sei $f\colon N \to M$ eine $C^\infty$-Abbildung. Sei $\dim M > \dim N$. Dann ist $M \setminus f(N) \subseteq M$ dicht und insbesondere ist $f$ nicht surjektiv.

**Beweis:** Sei $y \in M$. Sei $U$ eine offene Umgebung von $y$. Zu zeigen: $U \setminus f(N) \neq \emptyset$. O.B.d.A. sei $U$ das Kartengebiet einer Karte $h\colon U \to V$. Da $N$ das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, können wir $f^{-1}(U)$ durch abzählbar viele $C^\infty$-Kartengebiete $U_i$ von Karten $k_i\colon U_i \to V_i$ von $N$ überdecken, für die wir $U_i \subseteq f^{-1}(U)$ annehmen dürfen. Nun ist

$$h\big(f(N) \cap U\big) = h\left(\bigcup_i f\big(h_i^{-1}(V_i)\big)\right) = \bigcup_i h \circ f \circ h_i^{-1}(V_i)$$

Nach Proposition 16.6 ist jedes $h \circ f \circ h_i^{-1}(V_i)$ eine Nullmenge in $V$. Da die abzählbare Vereinigung von Nullmengen eine Nullmenge ist, ist auch $h\big(f(N) \cap U\big)$ eine Nullmenge in $V$. Insbesondere ist $V \setminus h\big(f(N) \cap U\big) \neq \emptyset$. Da $h$ bijektiv ist, folgt auch $U \setminus f(N) \neq \emptyset$. □

**16.8 Satz.** Für $n < m$ ist jede stetige Abbildung $S^n \to S^m$ homotop zu einer konstanten Abbildung. Insbesondere ist $S^m$ für $m > 1$ einfach zusammenhängend.

**Beweis:** Wir müssen zeigen, dass jede stetige Abbildung $f\colon S^n \to S^m$ homotop zu eine konstanten Abbildung ist. Nach Korollar 16.4 gibt es eine $C^\infty$-Abbildung $\varphi\colon S^n \to S^m$ mit $\|f(x) - \varphi(x)\| \leqslant \frac{1}{2}$ für alle $x \in S^n$. Sei nun $H\colon S^n \times [0,1] \to S^m$ definiert durch

$$H(x,t) := \frac{t \cdot f(x) + (1-t)\varphi(x)}{\|t \cdot f(x) + (1-t)\varphi(x)\|}$$

$H$ ist eine Homotopie von $\varphi$ nach $f$. Mit Korollar 16.7 folgt, dass $f$ nicht surjektiv ist. Sei $y \in S^m \setminus \tilde{f}(S^n)$. Nun ist $S^m \setminus \{y\} \cong \mathbb{R}^m$. Daher ist jede stetige Abbildung $S^n \to S^m \setminus \{y\}$ punktiert homotop zur konstanten Abbildung. Daher ist $f$ punktiert homotop zur konstanten Abbildung. □

**Proof** (Beweis der Invarianz der Dimension für $n = 2$.)**:** Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^m$ ein Homöomorphismus. Wir können ohne Einschränkung annehmen $f(0) = 0$ (andernfalls ersetzten wir $f$ durch $x \mapsto f(x) - f(0)$). Durch Einschränkung von $f$ erhalten wir eine Homotopieäquivalenz $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$. Wegen $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \simeq S^1$, $\mathbb{R}^m \setminus \{0\} \simeq S^{m-1}$ erhalten wir eine Homotopieäquivalenz $S^1 \simeq S^{m-1}$. Nun ist $S^k$ genau dann zusammenhängend und einfach zusammenhängend wenn $k = 1$ ist. Es folgt $m - 1 = 1$, also $m = 2$. □

# 17 Der Tangentialraum

**17.1 Beispiel.** Betrachte $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$. Zu $x \in S^n$ betrachten wir den Unterraum

$$T_x^n S^n := \{v \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle v \,|\, x\rangle = 0\}$$

Diesen können wir als $\mathbb{R}$-Vektorraum von „Richtungen" von $S^n$ in $x$ auffassen. Die Vereinigung der $T_x^n S^n$, $T^n S^n = \bigcup_{x \in S^n} T_x^n S^n$ ist ein natürlicher Weise ein Unterraum des topologischen Raumes $S^n \times \mathbb{R}^{n+1}$, also

$$T^n S^n = \{(x, v) \mid x \in S^n, v \in x^\perp\}$$

Insbesondere ist $T^n S^n$ ein topologischer Raum.

**17.2 Bemerkung.** $S^n$ heißt ***parallelisierbar***, falls es einen Homöomorphismus $\Theta\colon T^n S^n \to S^n \times \mathbb{R}^n$ gibt, so dass für jedes $x \in S^n$ die Einschränkung

$$\Theta|_{T_x^n S^n} : T_x^n S^n \to \{x\} \times \mathbb{R}^n$$

ein $\mathbb{R}$-Vektorraumisomorphismus ist. Unter den Sphären sind genau $S^1$, $S^3$ und $S^7$ parallelisierbar, siehe Bott, Milnor u. a. [B+58].

**17.3 Beispiel.** Sei $M \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$ eine $n$-dimensionale $C^\infty$-Untermannigfaltigkeit. Sei $x \in M$. Dann gibt es eine an $M$ angepasste Karte

$$\mathbb{R}^{n+k} \supseteq U \xrightarrow[\cong]{h} V \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$$

um $x$ mit $h(M \cap U) = (\mathbb{R}^n \times \{0\}) \cap V$. Das Urbild von $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ unter $Dh_x$ ist der ***Tangentialraum*** $T_x^u M$ von $M$ im Punkt $x$. Da $h$ ein Diffeomorphismus ist, ist $Dh_x$ ein Isomorphismus von $\mathbb{R}$-Vektorräumen. Insbesondere ist $\dim T_x^u M = \dim \mathbb{R}^n = n$.

$T_x^u M$ ist unabhängig von der Wahl der Karte $h$: Ist $k$ eine zweite an $M$ angepasste Karte, so ist

$$D(h \circ k^{-1})_{k(x)} = \begin{pmatrix} A & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

mit $A \in GL(n, \mathbb{R})$. Das ***Tangentialbündel*** von $M$ ist

$$T^n M := \{(x, v) \mid x \in M, v \in T_x^u M\} \subseteq M \times \mathbb{R}^{n+k}$$

Ist $V \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit der Kodimension $0$, also $V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, so ist $T^n V = V \times \mathbb{R}^n$.

**17.4 Lemma.** Sei $M \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$ eine $C^\infty$-Untermannigfaltigkeit. Sei $x \in M$. Für $v \in \mathbb{R}^{n+k}$ sind äquivalent:

**(1)** $v \in T_x^u M$.

**(2)** Es gibt einen $C^\infty$-Weg $\omega\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ mit $\omega(0) = x$ und $\frac{d\omega}{dt}(0) = v$.

Beweis: Sei $\mathbb{R}^{n+k} \supseteq U \xrightarrow{h} V \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ eine Karte mit $h(M \cap U) = V \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})$. Ohne Einschränkungen können wir $h(x) = 0$ annehmen.

Ist $v \in T_x^u M$, so gilt $Dh_x(v) \in \mathbb{R}^n \times \{0\}$. Sei $\omega\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ definiert durch $\omega(t) := h^{-1}(t \cdot Dh_x(v))$. Dann gilt

$$\frac{d\omega}{dt}(0) = \frac{d}{dt} h^{-1}\big(t \cdot Dh_x(v)\big) = \big(Dh^{-1}\big)_{h(x)}\big(Dh_x(v)\big) = v$$

Im umgekehrten Fall ist

$$Dh_x\left(\frac{d\omega}{dt}(0)\right) = Dh_{\omega(0)}(D\omega_0(1)) = D(h\circ\omega)_0(1)$$

Da $h\circ\omega\colon(-\varepsilon,\varepsilon)\to\mathbb{R}^n\times\{0\}$, folgt auch $D(h\circ\omega)_0(1)\in\mathbb{R}^n\times\{0\}$. □

**17.5 Lemma.** Seien $\omega,\eta\colon(-\varepsilon,\varepsilon)\to\mathbb{R}^n$ zwei $C^\infty$-Abbildungen, mit $\omega(0)=\eta(0)$. Dann sind äquivalent:

**(1)** $\frac{d\omega}{dt}(0)=\frac{d\eta}{dt}(0)$

**(2)** Für alle $f\in C^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ gilt $\frac{d(f\circ\omega)}{dt}(0)=\frac{d(f\circ\eta)}{dt}(0)$

**Beweis:** Nach der Kettenregel gilt

$$\frac{d(f\circ\omega)}{dt}(0) = (Df)_{\omega(0)}\left(\frac{d\omega}{dt}(0)\right)$$

und somit die erste Implikation.

Sei nun $P_i:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ die Projektion auf die $i$-te Koordinate. Dann gilt

$$\frac{d(P_i\circ\omega)}{dt}(0) = P_i\left(\frac{d\omega}{dt}(0)\right).$$

und es folgt die andere Implikation. □

**17.6 Definition.** Sei $M$ eine $C^\infty$-Mannigfaltigkeit. Sei $x\in M$. Sei $\mathcal{T}_xM$ die Menge der $C^\infty$-Abbildungen $\omega\colon(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$ mit $\omega(0)=x$. Durch

$$\omega\sim\eta :\Leftrightarrow \forall f\in C^\infty(M,\mathbb{R}): \frac{d(f\circ\omega)}{dt}(0)=\frac{d(f\circ\eta)}{dt}(0)$$

erhalten wir eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{T}_xM$. Der ***Tangentialraum*** zu $M$ im Punkt $x$ ist definiert als die Menge der Äquivalenzklassen $T_xM := {}^{\mathcal{T}_xM}/_{\sim}$.

**17.7 Bemerkung.** Sei $M\subseteq\mathbb{R}^{n+k}$ eine Untermannigfaltigkeit und $x\in M$. Wegen Lemma 17.4 ist die Abbildung $\mathcal{T}_xM\to T_x^uM$, $\omega\mapsto\frac{d\omega}{dt}(0)$ surjektiv und induziert wegen Lemma 17.5 eine bijektive Abbildung $\alpha_x^u\colon T_xM\to T_x^uM$.

**17.8 Bemerkung.** Sei $V\subseteq\mathbb{R}^n$ offen und $x\in V$. Dann erhalten wir aus Bemerkung 17.7 eine Bijektion

$$\begin{array}{rcl}\alpha_x^u\colon T_xV & \longrightarrow & \mathbb{R}^n\\ [\omega] & \longmapsto & \frac{d\omega}{dt}(0)\end{array}$$

denn $V\subseteq\mathbb{R}^n$ ist eine $C^\infty$-Mannigfaltigkeit der Kodimension 0. Oft werden wir diesen Isomorphismus unterschlagen und einfach $T_xV=\mathbb{R}^n$ schreiben.

**17.9 Bemerkung.** Sei $U$ eine offene Umgebung von $x\in M$. Dann gilt $T_xU = T_xM$. Genauer induziert die Inklusion $U\subseteq M$ eine Inklusion $\mathcal{T}_xU\to\mathcal{T}_xM$, die wiederum einen kanonischen Isomorphismus $T_xU\xrightarrow{\cong}T_xM$ induziert.

**17.10 Lemma.** Sei $\varphi\colon N \to M$ eine $C^\infty$-Abbildung und $x \in N$. Dann definiert $[\omega] \mapsto [\varphi \circ \omega]$ eine wohldefinierte Abbildung $T_x\varphi\colon T_xN \to T_{\varphi(x)}M$.

**Beweis:** Seien $\omega, \eta\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to N$ glatte Wege mit $\omega(0) = x = \eta(0)$ und $[\omega] = [\eta] \in T_xN$. Sei $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ eine Testfunktion. Zu zeigen ist:

$$\frac{d(f \circ \varphi \circ \omega)}{dt}(0) = \frac{d(f \circ \varphi \circ \eta)}{dt}(0)$$

Sei $g := f \circ \varphi \in C^\infty(N, \mathbb{R})$. Da $[\omega] = [\eta] \in T_xN$, gilt $\frac{d(g\circ\omega)}{dt}(0) = \frac{d(g\circ\eta)}{dt}(0)$. $\square$

**17.11 Definition.** $T_x\varphi$ heißt die ***Tangentialabbildung*** von $\varphi$ in $x$.

Die Tangentialabbildung ist *funktoriell*, das heißt

**a)** Für die Identität $\mathrm{id}_M\colon M \to M$ gilt $T_x \,\mathrm{id} = \mathrm{id}_{T_xM}$.

**b)** Für $N \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\psi} W$ gilt $T_x(\psi \circ \varphi) = T_{\varphi(x)}\psi \circ T_x\varphi$. (*Kettenregel für die Tangentialabbildung*.)

**17.12 Lemma.** Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $V \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und $\varphi\colon U \to V$ eine $C^\infty$-Abbildung mit $\varphi(x) = y$. Dann ist

$$T_x\varphi\colon \mathbb{R}^n = T_xU \to T_{\varphi(x)}V = \mathbb{R}^m$$

genau das Differential $D\varphi_x$ von $\varphi$ im Punkt $x$.

**Beweis:** Sei $v \in \mathbb{R}^n$. Unter $\mathbb{R}^n = T_xU$ ist $v = [\omega_v]$ mit $\omega_v(t) = x + t \cdot v$. Unter $T_yV = \mathbb{R}^m$ ist

$$T_x\varphi([\omega_v]) = [\varphi \circ \omega_v] = \frac{d(\varphi \circ \omega_v)}{dt}(0) = D\varphi_x \circ (D\omega_v)_0(1) = D\varphi_x(v) \qquad \square$$

**17.13 Proposition.** **a)** Sei $M$ eine $C^\infty$-Mannigfaltigkeit und $x \in M$. Dann gilt es eine eindeutige $\mathbb{R}$-Vektorraumstruktur auf $T_xM$ mit folgender Eigenschaft:

Ist $V \subseteq \mathbb{R}^k$ offen, $\varphi\colon V \to M$ glatt mit $\varphi(y) = x$, so ist $T_y\varphi\colon \mathbb{R}^k = T_yV \to T_xM$ $\mathbb{R}$-linear.

**b)** Ist $f\colon N \to M$ eine $C^\infty$-Abbildung mit $f(x) = y$, so ist $T_xf\colon T_xN \to T_yM$ bezüglich der $\mathbb{R}$-Vektorraumstruktur aus a) $\mathbb{R}$-linear.

Ist $M \supseteq U \xrightarrow{h} V \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Karte um $x$, so legt $T_xh\colon T_xM = T_xU \to T_{h(x)}V = \mathbb{R}^n$ die $\mathbb{R}$-Vektorraumstruktur auf $T_xM$ fest.

**Beweis:** **a)** Sei $M \supseteq U \xrightarrow{h} W \subseteq \mathbb{R}^n$ eine $C^\infty$-Karte um $x$. Dann ist $T_xh\colon T_xM = T_xU \to T_{h(x)}W = \mathbb{R}^n$ bijektiv mit $(T_xh)^{-1} = T_{h(x)}(h^{-1})$. Wir benutzen diesen Isomorphismus um die $\mathbb{R}$-Vektorraumstruktur auf $T_xM$ zu definieren:

$$v + w := \left(T_{h(x)}h^{-1}\right)\left(T_xh(v) + T_xh(w)\right)$$

Dies ist die einzige $\mathbb{R}$-Vektorraumstruktur auf $T_xM$, für die $T_{h(x)}(h^{-1})$ $\mathbb{R}$-linear ist.

Sei nun $\varphi\colon V \to M$ eine $C^\infty$-Abbildung mit $V \subseteq \mathbb{R}^k$ offen und $\varphi(y) = x$. Um zu zeigen, dass $T_y\varphi\colon \mathbb{R}^k = T_yV \to T_xM$ $\mathbb{R}$-linear ist, genügt es zu zeigen, dass die Komposition $T_x(h) \circ T_y(\varphi)\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ $\mathbb{R}$-linear ist.

Nun gilt aber nach Lemma 17.12

$$T_x(h) \circ T_y(\varphi) = T_y(h \circ \varphi) = D_y(h \circ \varphi).$$

Also ist $T_x(h) \circ T_y(\varphi)$ $\mathbb{R}$-linear, da $D_y(h \circ \varphi)$ $\mathbb{R}$-linear ist.

**b)** Seien $N \supseteq U \xrightarrow{h} V \subseteq \mathbb{R}^n$ und $M \supseteq \hat{U} \xrightarrow{\hat{h}} \hat{V} \subseteq \mathbb{R}^n$ glatte Karten um $x$ bzw. um $y$. Da

$$T_x h\colon T_x N = T_x U \to T_{h(x)} V = \mathbb{R}^n$$
$$T_y \hat{h}\colon T_y M = T_y \hat{U} \to T_{\hat{h}(y)} \hat{V} = \mathbb{R}^m$$

Isomorphismen von $\mathbb{R}$-Vektorräumen sind, genügt es zu zeigen, dass $(T_y \hat{h}) \circ (T_x f) \circ (T_x h)^{-1}$ $\mathbb{R}$-linear ist. Dies folgt mit der Kettenregel:

$$(T_y \hat{h}) \circ (T_x f) \circ (T_x h)^{-1} = T_{h(x)}\big(\hat{h} \circ f \circ h^{-1}\big) \overset{\text{Lemma 17.12}}{=} D\big(\hat{h} \circ f \circ h^{-1}\big)_{h(x)} \qquad \square$$

**17.14 Bemerkung.** Ist $f\colon N \to M$ glatt und $x \in N$, so gilt $\operatorname{Rang}_x f = \operatorname{Rg}(T_x f)$. Insbesondere ist $x$ genau dann regulär, wenn $T_x f \cong T_x N \to T_{f(x)} M$ surjektiv ist.

# 18 Das Tangentialbündel

**18.1 Definition.** Sei $X$ ein topologischer Raum. Ein $n$-dimensionales ***Vektorraumbündel*** über $X$ ist eine stetige, surjektive Abbildung $\pi\colon E \to X$, wobei für jedes $x \in X$ die Faser $E_x := \pi^{-1}(\{x\})$ mit einer $n$-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraumstruktur versehen ist, so dass gilt:

Für alle $x \in X$ gibt es eine offene Umgebung $U \subseteq X$ von $x$ und einen Homöomorphismus

$$f\colon \pi^{-1}(U) \xrightarrow{\approx} U \times \mathbb{R}^n,$$

sodass für jedes $y \in U$ $g_y := f\big|_{E_y} \colon E_y \to \{y\} \times \mathbb{R}^n$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraumisomorphismus ist.

Oft sagt man für diese Eigenschaft auch, dass $E$ ***lokal trivial*** ist. Das Paar $(f, U)$ heißt dann ***Bündelkarte*** für $E$.

**18.2 Beispiel.** Sei $\tau\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\tau(v) = -v$. Dann ist der Abbildungstorus $T(\tau)$ von $\tau$ ein 1-dimensionales Vektorraumbündel über $[0,1]/0 \sim 1 \cong S^1$, es heisst auch das Möbiusband.

**18.3 Definition.** Seien $E$ und $E'$ Vektorraumbündel über $X$ und $X'$. Sei $f\colon X \to X'$ stetig. Eine ***lineare Abbildung über*** $f$ ist eine stetige Abbildung $F\colon E \to E'$, so dass

**(i)** $\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{F} & E' \\ \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \downarrow{\scriptstyle \pi'} \\ X & \xrightarrow{f} & X' \end{array}$ kommutiert.

**(ii)** $\forall x \in X$ ist $F_x := F\big|_{E_x} \colon E_x \to E'_{f(x)}$ $\mathbb{R}$-linear.

Das Paar $(F, f)$ heisst dann eine Vektorraumbündelabbildung.

**18.4 Bemerkung.** Ist $(F, f)\colon (E, X) \to (E', X')$ eine Vektorraumbündelabbildung, so ist $x \mapsto \mathrm{Rg}(F_x)$ nicht notwendig eine stetige Abbildung auf $X$. (Z.B., da die Matrizen von Rang $k$ nicht offen in $\mathbb{R}^{n\times n}$ sind.) Insbesondere ist $\ker F := \{v \in E \mid v \in \ker F_{\pi(v)}\}$ kein Vektorraumbündel. (Ebenso ist das Bild einer Vektorraumbündelabbildung nicht notwendig ein Vektorraumbündel.)

**18.5 Definition.** Sei $E$ ein Vektorraumbündel über $X$. Ein stetiger ***Schnitt*** von $E$ ist eine stetige Abbildung $s\colon X \to E$ mit $\pi \circ s = \mathrm{id}_X$.

**18.6 Bemerkung.** In jedem Vektorraumbündel gibt es den ***Nullschnitt*** der $x \in X$ den Nullvektor in $E_x$ zuordnet. Mittels des Nullschnitts wird $B$ oft als Unterraum von $E$ aufgefasst.

**18.7 Beispiel.** Sei $E := T(\tau)$ das Möbiusband über $S^1$ und $E' := S^1 \times \mathbb{R}$ das trivial Vektorraumbündel über $S^1$. Dann hat jede lineare Abbildung $F\colon E \to E'$ über $\mathrm{id}_{S^1}$ eine Nullstelle, das heisst, es gibt $x \in S^1$ so dass $F_x\colon E_x \to E'_x$ die Nullabbildung ist. Denn andernfalls wäre jedes $F_x$ ein lineare Isomorphismus (da $E$ und $E'$ von Dimension 1 sind) und damit $F\colon E \to E'$ ein Homöomorphismus. Da $F$ den Nullschnitt in $E$ identisch auf den Nullschnitt in $E'$ abbildet, erhalten wir dann auch einen Homöomorphimus $E \setminus S^1 \to E' \setminus S^1$. In den Übungen haben wir aber gesehen, dass $E \setminus S^1$ wegzusammenhängend ist, wogegen $E' \setminus S^1 = S^1 \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$ offenbar nicht wegzusammenhängend ist.

**18.8 Definition.** Sei $M$ eine $C^\infty$-Mannigfaltigkeit. Das ***Tangentialbündel*** von $M$ ist

$$TM := \bigsqcup_{x \in M} T_x M.$$

Wir werden im Folgenden eine Topologie auf $TM$ konstruieren, sodass $TM$ mit der kanonischen Projektion $\pi\colon TM \to M$ ein Vektorbündel ist.

**18.9 Definition.** Sei $M$ eine $C^\infty$-Mannigfaltigkeit. Sei $M \supseteq U \xrightarrow{h} V \subseteq \mathbb{R}^n$ eine $C^\infty$-Karte von $M$. Dann heißt $Th\colon TU \to V \times \mathbb{R}^n$ mit

$$Th(v) = \Big(h\big(\pi(v)\big), T_{\pi(v)}h(v)\Big)$$

die von $h$ ***induzierte Bündelkarte*** von $TM$.

**18.10 Bemerkung.** Seien $M \supseteq U_i \xrightarrow{h_i} V_i \subseteq \mathbb{R}^n$, $i = 0, 1$ zwei $C^\infty$-Karten von $M$. Dann ist der ***Bündelkartenwechsel*** zwischen den Bündelkarten $Th_0$ und $Th_1$

$$Th_1 \circ (Th_0)^{-1}\colon h_0(U_0 \cap U_1) \times \mathbb{R}^n \longrightarrow h_1(U_0 \cap U_1) \times \mathbb{R}^n$$

gegeben durch $(x, v) \mapsto \Big(h_1\big(h_0^{-1}(x)\big), D(h_1 \circ h_0^{-1})_x(v)\Big)$. Insbesondere ist der Bündelkartenwechsel stetig und sogar $C^\infty$.

**18.11 Proposition.** Sei $M$ eine $C^\infty$-Mannigfaltigkeit.

**a)** $\mathcal{U} := \big\{(Th)^{-1}(W) \,\big|\, h\colon U \to V \text{ Karten für } M, W \subseteq V \times \mathbb{R}^n \text{ offen}\big\}$ ist die Basis einer Topologie auf $TM$.

**b)** Mit dieser Topologie ist $TM$ ein Vektorraumbündel.

Beweis (grobe Skizze): **(i)** Folgt aus der Stetigkeit der Bündelkartenwechsel.

**(ii)** Die Bündelkarten liefern die lokale Trivialität. □

**18.12 Bemerkung.**

- Ist $\varphi\colon M \to N$ eine $C^\infty$-Abbildung, so ist $T\varphi\colon TM \to TN$ mit $T\varphi(v) := \big(T_{\pi(v)}\varphi\big)(v)$ eine lineare Abbildung über $\varphi$.
- Schnitte des Tangentialbündels heißen ***Vektorfelder***. Ein differenzierbares Vektorfeld ist ein Vektorfeld $s\colon M \to TM$, so dass $Th \circ s|_U\colon U \to V \times \mathbb{R}^n$ für jede $C^\infty$-Karte $h\colon U \to V$ von $M$ eine $C^\infty$-Abbildung ist.

# Index

Die *Seitenzahlen* sind mit Hyperlinks versehen und somit anklickbar

# Literatur

[B+58] Raoul Bott, John Milnor u. a. „On the parallelizability of the spheres". In: *Bull. Amer. Math. Soc* 64.8789 (1958), S. 6 (siehe S. 46).

# Abbildungsverzeichnis