Prof. Dr. E. Hellmann
Matthias Weirich

SS 2017

Einführung in die Algebra
Blatt 4
Abgabe: 22.5.2017

Aufgabe 1:

Beweisen Sie, dass jede endliche auflösbare Gruppe G eine Normalreihe

$$\{e\} = G_0 \subset G_1 \subset \ldots \subset G_{n-1} \subset G_n = G$$

besitzt, so dass die Subquotienten G_i/G_{i-1} Primzahlordnung haben.

Aufgabe 2:

Beweisen Sie, dass eine Gruppe G der Ordnung 15 zyklisch ist.
Hinweis: Benutzen Sie die Sylowschen Sätze um zu zeigen, dass G nur eine 3-Sylow- bzw. nur eine 5-Sylowgruppe hat. Zeigen Sie dann, dass diese zwei Sylowgruppen normal sind.

Aufgabe 3:

Sei R ein kommutativer Ring und I, J Ideale in R. Definiere die Teilmengen IJ und $I+J$ von R wie folgt:

- $IJ = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \mid n \in \mathbb{N}, a_i \in I, b_i \in J \right\}$
- $I + J = \{a + b \mid a \in I, b \in J\}$

Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(i) Die Mengen IJ und $I+J$ sind Ideale in R.
(ii) Es gilt die Inklusion $IJ \subseteq I \cap J$. Geben Sie ein Beispiel an, in dem die Inklusion strikt ist.
(iii) Es gilt, dass $IJ = I \cap J$ falls $I + J = R$.

Aufgabe 4:

Zeigen Sie, dass die folgenden Mengen mit der natürlichen Addition und Multiplikation Ringe sind. Welche der Ringe sind nullteilerfrei? Bei welchen Ringen handelt es sich um Körper?

(i) $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$
(ii) $\mathbb{Z}_{(p)} = \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}_{>0}, p \nmid b \right\}$, wobei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl ist.
(iii) $\mathbb{Q}\left(\sqrt{5}\right) = \left\{ x + y\sqrt{5} \mid x, y \in \mathbb{Q} \right\} \subset \mathbb{R}$
(iv) $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$
(v) $\mathbb{Q}[\epsilon] := \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}$, wobei $(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) = (a_1 b_1, a_1 b_2 + a_2 b_1)$, für alle $a_i, b_i \in \mathbb{Q}$. Die Addition wird komponentenweise definiert.

Homepage: http://www.uni-muenster.de/Arithm/hellmann/veranstaltungen