Seminar zur Galoistheorie »Solving the Quintic« im SS19

Prof. Dr. Joachim Lohkamp, Matthias Kemper

Ein Ziel des Seminars ist es, zu verstehen, warum sich die Lösungen von Polynomgleichungen

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$$

ab Grad $n = 5$ im Allgemeinen nicht unter Verwendung von Grundrechenarten und Wurzeln durch die Koeffizienten ausdrücken lassen. Jeder Teilnehmer bearbeitet dazu selbstständig eines der folgenden Themen und erklärt es den anderen in einem 90minütigen Vortrag.

Anspruch der Vortragsthemen auf einer Skala von $\star$ bis $\star\star\star$.

1 Polynomgleichungen vom Grad 2, 3 und 4*

Bereits im 16. Jahrhundert waren Lösungsformeln für Polynomgleichungen bis zum Grad vier bekannt, deren Ideen hier vorgestellt werden sollen.
Literatur: [Esc01, Ch. 2], [Tig01, Ch. 2, 3] und [Ste15, 1.4] enthalten viele geschichtliche Details und historische Notation, die für den Vortrag etwas gekürzt werden sollten.

2 Grundideen der Galoistheorie**

Unter Ausnutzung von Symmetrien lassen sich die Lösungsformeln für niedrigen Grad systematisch herleiten und man könnte die Hoffnung haben, dass dies auch in höherem Grad funktioniert. Dies ist der Startpunkt der Galoistheorie, mit der man schließlich zeigen kann, dass es ab Grad fünf keine Lösungsformel geben kann. Dieser Vortrag soll einen kleinen Überblick geben und die folgenden technischeren Vorträge motivieren.
Literatur: [Gri07], wobei man den schon im ersten Vortrag behandelten Stoff etwas kürzen kann. Falls unbekannte Begriffe auftauchen, kann man diese z. B. in [Bos09] oder [Ste15] nachschlagen und sollte sie auch im Vortrag erklären.

3 Körper, Körpererweiterungen und Gruppen**

Als Grundlage für die späteren Vorträge sollen folgende Konzepte eingeführt (oder wiederholt) und mit Beispielen illustriert werden: Komplexe Zahlen und Einheitswurzeln, Körpererweiterungen, Adjunktion, Radikalerweiterungen, Körperautomorphismen ([Bew09, 9.2] reicht für unsere Zwecke, ausführlicher aber auch abstrakter ist [Bos09]). Man kann sich auf Körper zwischen $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{C}$ beschränken. Weiter: Gruppen und Homomorphismen, normale Untergruppen, Homomorphiesatz [Bos09, 1.2 bis Korollar 7].
Literatur: [Bew09], [Bos09], [Ste15]. Man sollte einen Blick in [Sti94] werfen, um zu sehen, was gebraucht wird.

4 Konstruktionen mit Zirkel und Lineal*

Eine klassische Anwendung von Körpererweiterungen ist die Beantwortung der Frage, welche geometrischen Objekte mit Zirkel und Lineal konstruiert werden können. Man kann beweisen, welche n-Ecke konstruierbar sind und dass weder die »Quadratur des Kreises« noch die Dreiteilung eines Winkels möglich sind.
Literatur: [Mos13], wobei einige Grundbegriffe schon im vorherigen Vortrag besprochen wurden. Der Artikel enthält keine Zeichnungen, die unbedingt zu ergänzen sind. Alternativ: [Bew09, Kapitel 7], [Ste15, Chapter 7].

5 Galoisgruppen von Gleichungen**
Hier wird eine »Lösungsformel« für allgemeine Polynomgleichungen mit Radikalerweiterungen formalisiert. Man erkennt, dass sich die Symmetrie der Lösungen auch in der Galoisgruppe dieser Erweiterungen widerspiegeln muss.
Literatur: [Sti94] bis vor The Structure of Radical Extensions, S. 24; [Ste15, 18.3].

6 Auflösbarkeit von Gruppen**
Galoisgruppen von Radikalerweiterungen sind immer *auflösbar*. Das steht für Polynome vom Grad ≥ 5 im Widerspruch zu der Symmetrie aus dem letzten Vortrag, es kann also keine allgemeine Lösungsformel geben.
Literatur: [Sti94] ab The Structure of Radical Extensions, S. 24.

7 Solving the Quintic – jetzt erst recht***
Bisher hieß »Lösung« einer Polynomgleichung immer »explizite Lösungsformel unter Verwendung von Grundrechenarten und Wurzeln«. Lässt man kompliziertere Funktionen zu, sind allgemeine Lösungsverfahren denkbar und auch bekannt. Beispielhaft wollen wir uns ein Verfahren von Charles Hermite anschauen, das θ-Funktionen verwendet, die sich auch numerisch sehr gut berechnen lassen.
Literatur: [Kin96, 1, 7.1, 3.3] für einen kurzen Überblick, Hermites Verfahren und die Reduktion auf die dort vorausgesetzte Bring-Jerrard-Quintic. Hier ist es wichtig, den Überblick zu behalten und sich nicht in Details zu verlieren.

Literatur

[Bew09] J. Bewersdorff, *Algebra für Einsteiger*, 4., aktualisierte Aufl., *Studium Mathematik für Einsteiger*, Vieweg + Teubner, Wiesbaden, 2009. doi:10.1007/978-3-8348-9326-0.

[Bos09] S. Bosch, *Algebra*, 7., überarbeitete Aufl., *Springer-Lehrbuch*, Springer, Berlin, 2009. doi:10.1007/978-3-540-92812-6.

[Esc01] J.-P. Escofier, *Galois Theory*, *Graduate Texts in Mathematics* **204**, Springer, New York, 2001.

[Gri07] D. Grieser, *Grundideen der Galoistheorie*, 2007. https://www.staff.uni-oldenburg.de/daniel.grieser/wwwpapers/Grundideen_Galois.pdf.

[Kin96] R. B. King, *Beyond the Quartic Equation*, Birkhäuser, Boston, 1996.

[Mos13] L.-F. Moser, *Konstruktionen mit Zirkel und Lineal*, 2013. http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~lfmoser/vortrag_zirkelundlineal.pdf.

[Ste15] I. Stewart, *Galois Theory*, 4. ed., CRC Press, Boca Raton, 2015.

[Sti94] J. Stillwell, Galois Theory for Beginners, *The American Mathematical Monthly* **101** no. 1 (1994), 22–27. doi:10.2307/2325119.

[Tig01] J.-P. Tignol, *Galois' Theory of Algebraic Equations*, World Scientific, Singapore, 2001.

→ https://www.uni-muenster.de/geoana/lehre/quintic19