Prof. Dr. Joachim Lohkamp
Matthias Kemper

WWU Münster
WS19/20

Potentialtheorie

Blatt 6

Besprechung am **12. Dezember 2019**

Aufgabe 1: Normale Limiten

Auf der oberen Halbebene $H^n = \{x_1 > 0\} \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, betrachten wir die Funktion

$$u(x) = \frac{x_1 x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \ .$$

Zeigen Sie:

(a) u ist harmonisch auf H^n.

(b) $u(x_1, y) \xrightarrow{x_1 \to 0} 0$ für jedes $y \in \mathbb{R}^{n-1}$.

(c) $u(x) \to 0$ für $|x| \to \infty$.

(d) Skizzieren oder plotten Sie die Funktion u für $n = 2$. Existieren alle Limiten von u bei ∂H?

(e) In welchen Randpunkten y existieren nichttangentiale Limiten, d. h. Limiten der Form

$$\lim_{\substack{x \to (0,y) \\ x_1 > c|x-y|}} u(x) \quad \text{für ein } 0 < c < 1?$$

Aufgabe 2: Harmonische Fortsetzung

u sei eine harmonische Funktion auf $B_1(0) \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, mit $u(x)/G(x,0) \to 0$ für $x \to 0$, wobei $G(x,y) = \Phi(|x-y|)$ die Greensche Funktion auf $\mathbb{R}^n$ bezeichne. Beweisen Sie: Dann hat u eine harmonische Fortsetzung auf $B_1(0)$.
Tipp: Betrachten Sie die Funktionen $u_\alpha := u - P_{B_{1/2}(0)}(u) + \alpha \cdot (\Phi(|x|) - \Phi(1/2))$, wobei $P_{B_{1/2}(0)}(u)$ das Poisson-Integral von u auf $B_{1/2}(0)$ bezeichnet, und verwenden Sie das Max-/Minimumsprinzip.

Aufgabe 3: Kelvin-Transformation

Im $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, bezeichnen wir die Inversion an der Einheitssphäre mit $x^\star = x/|x|^2$. Die *Kelvin-Transformation*, ebenfalls mit * bezeichnet, schickt eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ auf die Funktion $f^\star : U^\star \to \mathbb{R}$ mit $f^\star(x) = |x|^{-(n-2)} f(x^\star)$. Zeigen Sie:

(a) $f^{\star\star} = f$

(b) f ist harmonisch auf U genau dann, wenn $f^\star$ harmonisch auf $U^\star$ ist.

(c) Sei u eine harmonische Funktion auf einer Umgebung von ∞ mit $u(x) \to 0$ für $x \to \infty$. Dann hat $u^\star$ eine harmonische Fortsetzung in 0 und $u = \mathcal{O}(r^{-(n-2)})$ bei ∞.