Prof. Dr. Joachim Lohkamp
Matthias Kemper

WWU Münster
WS19/20

Potentialtheorie

Blatt 5

Besprechung am **3. Dezember 2019**

Aufgabe 1: Spezielle Greensche Funktionen

Bestimmen Sie die (minimale) Greensche Funktion G_i für folgende Operatoren L_i und Gebiete D_i:

(a) $L_a = -\Delta$ und $D_a = \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$.

(b) $L_b = -\Delta$ und $D_b = B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ (Tipp: Probieren Sie den Ansatz $G_b(x, y) = G_a(x, y) - c\, G_a(x, y/|y|^2)$. Physiker nennen dies *Methode der Spiegelladung*).

(c) $L_c = -\Delta$ und $D_c = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 > 0\}$, $n \geq 3$ (auch hier gibt es eine Spiegelladung).

(d) $L_d = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \lambda$ für $\lambda > 0$, $D_d = \mathbb{R}$.

Aufgabe 2: Allgemeine Greensche Funktionen

Zeigen Sie, dass (für einen elliptischen Operator L auf einer Mannigfaltigkeit M) folgende Aussagen äquivalent sind:

(a) Es gibt eine positive superharmonische Funktion, die nicht harmonisch ist.

(b) Es gibt ein Potential $p > 0$.

(c) Für jeden Punkt $x \in M$ gibt es ein Potential, das auf $M \setminus \{x\}$ harmonisch ist.

Man kann in unserem Fall zeigen, dass die Potentiale in (c) bis auf Vielfache eindeutig sind.