Prof. Dr. Joachim Lohkamp
Matthias Kemper

WWU Münster
WS19/20

Potentialtheorie
Blatt 4

Besprechung am **19. November 2019**

Aufgabe 1: Schwaches Minimumsprinzip

Ziel dieser Aufgabe ist eine sehr allgemeine Fassung des (schwachen) Minimumsprinzips für L-superharmonische Funktionen $u \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$ auf einem beschränkten Gebiet $D \subset \mathbb{R}^n$:

$$\min_{\bar{D}} u \geq \min_{\partial D} u \; . \tag{$\star$}$$

Wir betrachten *uniform elliptische* Operatoren

$$L = -\sum_{ij} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2 \partial x_j^2} + \sum_i b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + V \; ,$$

wobei a_{ij}, b_i und V beschränkte Funktionen sind, wir a_{ij} als symmetrisch annehmen können ($a_{ij} = a_{ji}$) und es ein $k > 0$ gibt, sodass

$$\sum_{ij} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq k|\xi|^2 \quad \text{für alle } x \in D \text{ und } \xi \in \mathbb{R}^n,$$

d. h. die Matrizen (a_{ij}) sind in jedem Punkt positiv definit mit kleinstem Eigenwert $\geq k$.

Zeigen Sie schrittweise:

(a) Im Fall $Lu > 0$, $V = 0$ kann u kein Minimum im Inneren von D annehmen. (Was würden ∇u und die Hesse-Matrix an so einem Minimum erfüllen?)

(b) Für $Lu \geq 0$, $V = 0$ gilt ($\star$). (Finden Sie eine geeignete Funktion f, sodass $L(u + \epsilon f) > 0$, um (a) anwenden zu können)

(c) Im Fall $Lu \geq 0$, $V \geq 0$ gilt ($\star$) unter der zusätzlichen Voraussetzung $u|_{\partial D} \geq 0$.

(d) Falls es eine positive L-superharmonische Funktion $h \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$ gibt, folgt bei beliebigem V aus $Lu \geq 0$ und $u|_{\partial D} \geq 0$ schon $u \geq 0$. (Betrachten Sie den Operator L^h gegeben durch $L^h v = \frac{1}{h} L(hv)$)

Aufgabe 2: Perron-Verfahren

Wenn wir das Dirichlet-Problem zu einem elliptischen Operator auf Bällen gelöst haben (im Fall des Laplace-Operators mit dem Poisson-Kern), können wir es auch auf allgemeineren Gebieten lösen: Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $f : \partial D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann betrachten wir die Funktionen

$$\overline{H}_f = \inf\{u \text{ superharmonisch in } D \text{ und } \liminf_{D \ni y \to x} u(y) \geq f(x) \text{ für alle } x \in \partial D\} \quad \text{und}$$

$$\underline{H}_f = \sup\{u \text{ subharmonisch in } D \text{ und } \limsup_{D \ni y \to x} u(y) \leq f(x) \text{ für alle } x \in \partial D\} \; .$$

Zeigen Sie:

(a) $\overline{H}_f$ ist superharmonisch und $\underline{H}_f$ subharmonisch, sofern diese Funktionen nicht $\equiv \pm\infty$ sind.

(b) Wenn $\overline{H}_f$ und $\underline{H}_f$ endlich sind, sind sie beide harmonisch (*Tipp*: Wenn nicht, kann man sie mit der Lösung des Dirichlet-Problems auf Bällen lokal modifizieren).

(c) Wenn $f = \varphi|_{\partial D}$ für eine in D superharmonische Funktion $\varphi \in C(\overline{D})$, dann ist f *resolutiv*, d. h. es gilt $\overline{H}_f = \underline{H}_f$ (und diese Funktion ist harmonisch).

(d) Gleichmäßige Limiten resolutiver Funktionen sind resolutiv.

(e) Stetige Funktionen auf D lassen sie gleichmäßig durch Differenzen superharmonischer Funktionen approximieren.

(f) Stetige Funktionen f auf ∂D sind resolutiv.

(g) Finden Sie ein beschränktes Gebiet D und eine stetige Funktion $f : \partial D \to \mathbb{R}$, sodass $H_f := \overline{H}_f = \underline{H}_f$ harmonisch ist, aber *nicht* $\lim_{y \to x} H_f(y) = f(x)$ für jedes $x \in \partial D$ gilt.