Prof. Dr. Joachim Lohkamp
Matthias Kemper

WWU Münster
WS19/20

Potentialtheorie

Blatt 3

Abgabe am **5. November 2019**

Wichtige Beispiele für uniforme Räume sind (intrinsisch) uniforme Gebiete*, d. h. wir betrachten zusammenhängende offene Teilmengen D des $\mathbb{R}^n$ mit der* intrinsischen Metrik*, gegeben als*

$$d_D(x, y) = \inf\{\ell(\gamma) \mid \gamma \text{ verbindet } x \text{ und } y \text{ und liegt ganz in } D\} \ .$$

Aufgabe 1: Uniformität ist eine lokale Eigenschaft des Randes

Zeigen Sie, dass Uniformität eines beschränkten Gebiets $D \subset \mathbb{R}^n$ eine lokale Eigenschaft des Randes ist, genauer: Seien $r > 0$ und $c \geq 1$ fest und $D \cap B_r(z)$ c-uniform für alle $z \in \partial D \subset \bar{D}$. Dann ist D schon $42c^4 \operatorname{diam}(D)/r$-uniform. ($\operatorname{diam}(D)$ bezeichnet den Durchmesser von D in der Metrik d_D.)
Überlegen Sie sich dazu zunächst, warum man $\operatorname{diam}(D) = 1$ annehmen kann und dass man zwei Punkte $x, y \in D$ mit $d_D(x, y) \leq r/2$ mit einer c-uniformen Kurve verbinden kann.

Aufgabe 2: Uniforme Gebiete

Zeigen Sie:

(a) Der Halbraum $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 > 0\}$ ist ein uniformes Gebiet.

(b) Uniformität wird unter Bilipschitzabbildungen (Homöomorphismen $f : (X, d) \to (Y, d')$ mit einer Konstanten $L \geq 1$, sodass $L^{-1}\, d(x, y) \leq d'(f(x), f(y)) \leq L\, d(x, y)$ für alle $x, y \in X$) erhalten. Wie verändert sich dabei die Uniformitätskonstante?

(c) Jedes beschränkte Gebiet D mit Lipschitzregulärem Rand (d. h. um jeden Randpunkt in $\bar{D}$ gibt es eine Bilipschitzabbildung auf eine offene Teilmenge des abgeschlossenen Halbraums) ist uniform.

(d) Das Innere der Kochschen Schneeflocke ist ein uniformes Gebiet.