Prof. Dr. Joachim Lohkamp
Matthias Kemper

WWU Münster
WS19/20

Potentialtheorie

Blatt 2

Abgabe am **29. Oktober 2019** in der Übung

Aufgabe 1: Glättungskerne

(a) Finden Sie eine C^∞-Funktion $\eta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $\eta(x) = 0$ für $|x| \geq 1$ und $\int_{\mathbb{R}^n} \eta \, \mathrm{d}x = 1$!

Wir betrachten die Funktionen $\eta_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n}\eta(x/\varepsilon)$ und für $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ (d. h. f ist L^1 auf kompakten Teilmengen) definieren wir die *Glättung*

$$f_\varepsilon(x) := (\eta_\varepsilon * f)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(x-y) f(y) \, \mathrm{d}y \ .$$

Beweisen Sie folgende Eigenschaften:

(b) f_ε ist wirklich eine glatte Funktion.

(c) $f_\varepsilon \overset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} f$ punktweise fast überall.

Tipp: Man kann dazu den *Lebesgueschen Differentiationssatz* verwenden: Für eine messbare Funktion f gilt

$$\lim_{r \to 0} ⨍_{B_r(x)} |f(y) - f(x)| \, \mathrm{d}y = 0 \quad \text{für fast alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

(d) Falls f auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ stetig ist, konvergiert f_ε auf kompakten Teilmengen von U gleichmäßig gegen f.

(e) $f_\varepsilon \overset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} f$ in L^1_{loc}, d. h. $\int_K |f_\varepsilon(x) - f(x)| \, \mathrm{d}x \to 0$ für jedes kompakte $K \subset \mathbb{R}^n$.

Aufgabe 2: Superharmonie

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Wir nennen eine stetige Funktion $v : U \to \mathbb{R}$ *superharmonisch*, falls für jeden Ball $B := B_r(x)$ mit $0 < r < \operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus U)$ gilt:
Ist $h \in C(\bar{B})$ harmonisch in B und $u \geq h$ auf ∂B, dann ist auch $u \geq h$ im Inneren von B.

Wenn $-u$ superharmonisch ist, nennen wir u *subharmonisch*.

(a) Zeichnen Sie die Graphen von einigen superharmonischen Funktionen auf $(0,1) \subset \mathbb{R}$, die nicht alle differenzierbar sind.

(b) Zeigen Sie, dass $v \in C^2(U)$ genau dann superharmonisch ist, wenn

$$-\Delta u \geq 0 \ .$$

Subharmonisch entspricht also der Bedingung $-\Delta u \leq 0$.

(c) Beweisen Sie das *Maximumsprinzip* für subharmonische Funktionen $v \in C(\bar{D})$, wobei $D \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet ist:

Wenn v ihr Maximum im Inneren von D annimmt, ist v schon konstant.

(Analog gilt ein Minimumsprinzip für superharmonische Funktionen.)