Prof. Dr. Joachim Lohkamp
Matthias Kemper

WWU Münster
WS19/20

Potentialtheorie

Blatt 1

Abgabe am **22. Oktober 2019** in der Übung

Aufgabe 1: Eindimensionale Potentialtheorie

Auf einem offenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$ betrachten wir den Operator

$$L = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ .$$

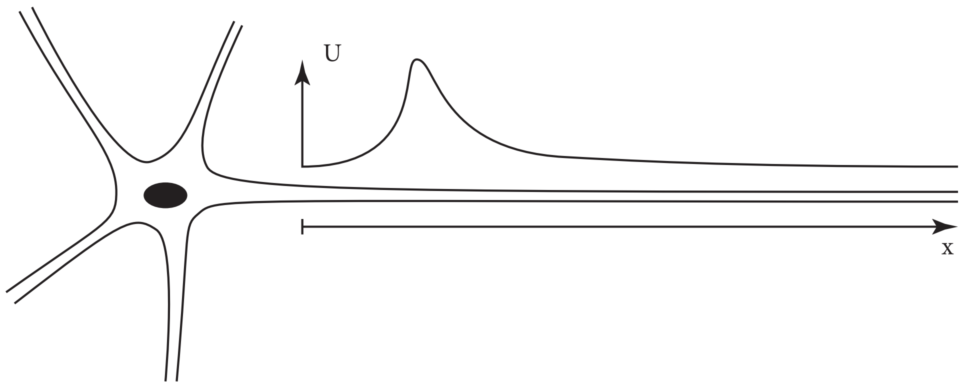
(a) Geben Sie alle (reellen) Lösungen der Eigenwertgleichung $Lu = \lambda u$ für $\lambda \in \mathbb{R}$ an!
Hinweis: Gemäß der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen sollten Sie zwei linear unabhängige Lösungen finden – geschicktes Raten genügt. Unterscheiden Sie die Fälle $\lambda < 0$, $= 0$ und > 0.

(b) Für welche Kombinationen von I und λ gibt es *positive* Lösungen von

$$L_\lambda u := (L - \lambda)u = 0\ ?$$

Welche Dimension hat der Raum der positiven Lösungen?

Aufgabe 2: Kabelgleichung für Neuronen



Die Ausbreitung elektrischer Impulse in Nervenfasern lässt sich mit der *Kabelgleichung*

$$\tau \frac{\partial U}{\partial t} - \xi^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + U = 0$$

beschreiben. Dabei ist

- U die Spannung in der Nervenfaser relativ zum Ruhepotential,
- $x \in \mathbb{R}$ die Ortskoordinate (wir nehmen die Nervenfaser als unendlich lang an),

- $t \geq 0$ die Zeitkoordinate,
- $\xi > 0$ die Längenkonstante (fest; je nach Typ zwischen 0,1 und 5 mm) und
- $\tau > 0$ die Zeitkonstante (fest; zwischen 1 und 100 ms).

Wir können ohne Einschränkung $\tau = \xi = 1$ setzen.

(a) Finden Sie zunächst die *stationären*, d. h. zeitunabhängigen Lösungen dieser Gleichung. Welche davon verschwinden im Unendlichen?

(b) Angenommen, eine Lösung U der Kabelgleichung hat die Form $U(x,t) = u(x)v(t)$. Zeigen Sie, dass dann

$$u''(x) - u(x) = \lambda u(x) \quad \text{und} \quad \dot{v}(t) = \lambda v(t)$$

für ein $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt und geben Sie die Lösungen dieser Gleichungen an (vgl. Aufgabe 1).

(c) Lösen Sie die Kabelgleichung für einen Gauß-Peak als Anfangsbedingung, d. h.

$$U(x, t = 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad \text{für ein } \sigma > 0.$$

Skizzieren Sie $x \mapsto U(x,t)$ für ein σ ihrer Wahl und ein paar Werte von t.

Hinweis: Sie können dazu die die Darstellung

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\frac{\sigma^2 k^2}{2}} \cos(kx)\, \mathrm{d}k$$

benutzen und die Lösungen aus (b) für $\lambda < -1$ (oder direkt die Fouriertransformation, falls Sie damit vertraut sind).