Seminar »Kurven und Flächen« im WS2017/18

Prof. Dr. Joachim Lohkamp, Matthias Kemper

1 Grundlagen zu Kurven

Einführung einiger Grundbegriffe: Parametrisierte Kurven, Länge regulärer Kurven, Parametrisierung nach Bogenlänge, Frenetsche Formeln, Fundamentalsatz der lokalen Kurventheorie. Sollte mit Beispielen illustriert werden. *Literatur:* [dC83, Abschnitte 1.2, 1.3, 1.5], [Ber03, 1.3]

2 Jordanscher Kurvensatz und Umlaufsatz

Die Aussagen des Jordanschen Kurvensatzes [BG88, 9.2] und des Umlaufsatzes [Che67, 1.] (beide auch in [Tap16, 2.1]) scheinen ziemlich offensichtlich, sind dafür aber recht schwer zu beweisen. Dafür folgen aus ihnen u. a. eine Formel, die Topologie und Krümmung von Kurven verknüpft, und eine Formel für die Fläche von Tubenumgebungen [Che67, 1.] [Ber03, 1.4.1].

3 Globale Eigenschaften von Kurven in der Ebene

In Ergänzung zum vorhergehenden Vortrag ein paar weitere schöne Aussagen: Der Vier-Scheitel-Satz (eine einfache geschlossene Kurve hat mindestens vier Punkte mit extremaler Krümmung) [Che67, 2.] [dC83, 1.7.B] und ein Satz von Schur, der den Fall illustriert, dass eine Kurve stärker als eine andere gekrümmt ist [dC76, 5-7 exercise 7]. Vgl. auch [Che67, 5.] und [Ber03, 1.3.2 Theorem 1].

4 Satz von Crofton und Totalkrümmung von Raumkurven

Der Satz von Crofton sagt, »wie viele« Geraden eine gegebene Kurven schneiden. Mit ihm lässt sich leicht beweisen, dass eine geschlossene Raumkurve eine Totalkrümmung von mindestens 2π hat (Fenchel), während das für eine verknotete Kurve mindestens 4π sind (Fary-Milnor). *Literatur:* [Che67, 4. ab p. 33 und Corollary auf p. 32]; in [dC83, 1.7.C] wird eine analoge Variante der Crofton-Formel besprochen.

5 Isoperimetrische Ungleichung

In der Ebene besagt die isoperimetrische Ungleichung, dass die Kurve, die bei vorgegebener Länge den größten Flächeninhalt einschließt, ein Kreis ist. Varianten davon tauchen in der modernen Geometrie ständig auf, sodass es nicht schaden kann, mehrere Beweise zu sehen. Zur Auswahl stehen ein relativ einfacher Beweis von Schmidt [Che67, 3., pp. 26–27] [dC83, 1.7.A], ein anschaulicher Beweis unter Verwendung von Steiner-Symmetrisierung [Ber87, 12.11.2] und ein Beweis der Verallgemeinerung auf beliebige Dimensionen von Knothe und Gromov mit dem Satz von Stokes [Sak96, VI.1.1] [Ber87, 12.11.2]. Der Übersichtsartikel von Blåsjö [Blå05] enthält all diese Beweise und ist sehr zu empfehlen.

6 Grundlagen zu Flächen

Ein paar Definitionen: Reguläre Flächen, parametrisierte Flächen, Tangentialebene, erste Fundamentalform, Flächeninhalt. Viele Beispiele! *Literatur:* [dC83, 2.1–2.5]

7 Krümmung von Flächen

Die Gaußabbildung beschreibt den Verlauf des Normalenvektors einer Fläche. Ihr Differential, die zweite Fundamentalform, enkodiert alle wichtigen Krümmungsgrößen: die Eigenwerte nennt man Hauptkrümmungen, deren Summe ist die mittlere Krümmung und ihr Produkt die Gaußkrümmung. *Literatur:* [dC83, 3.1, 3.2], [Tap16, 4.1, 4.3, 4.4]

8 Die innere Geometrie von Flächen

Kovariante Ableitung, Geodäten, Parallelverschiebung, Gauß-Codazzi-Mainardi-Gleichungen.

Ziel ist das *Theorema egregium* (»hervorragendes Theorem«) von Gauß: Die Gaußkrümmung hängt nicht davon ab, wie man eine Fläche in den $\mathbb{R}^3$ einbettet, sondern nur von der Längenmessung auf der Fläche selbst. *Literatur:* [Küh10, 4A–C] oder [dC83, 4.1–4.4]

9 Klassifikation von geschlossenen Flächen

Die geschlossenen Flächen lassen sich durch die Anzahl der Löcher (Sphäre: 0, Torus: 1, ...) und die Frage nach der Orientierbarkeit (Sphäre, Torus: ja; Projektiver Raum, Kleinsche Flasche: nein) vollständig klassifizieren. Sobald man glaubt, dass Flächen triangulierbar sind, ist der Beweis hübsch und elementar. *Literatur:* [Mas77, ch. 1, vor allem sec. 5 und 7]

10 Der Satz von Gauss-Bonnet

Für geschlossene Flächen M besagt der Satz von Gauß-Bonnet

$$\int_M K \mathrm{d}A = 2\pi\chi(M) ,$$

wobei K die Gaußkrümmung und χ die Eulercharakteristik von M ist – die Totalkrümmung einer Fläche ist also ausschließlich durch ihre Topologie bestimmt! Zum Beweis trianguliere man eine Fläche und werfe den Umlaufsatz mit dem Satz von Stokes zusammen. *Literatur:* [Küh10, 4F]; zur Interpretation [Ber03, 3.1.2–3.1.3]

Literatur

[Ber87] M. Berger, *Geometry II*, Springer, Berlin, 1987. doi:10.1007/978-3-540-93816-3.

[Ber03] M. Berger, *A panoramic view of Riemannian geometry*, Springer, Berlin, 2003. doi:10.1007/978-3-642-18245-7.

[BG88] M. Berger and B. Gostiaux, *Differential geometry: manifolds, curves, and surfaces*, Springer, New York, 1988. doi:10.1007/978-1-4612-1033-7.

[Blå05] V. Blåsjö, The isoperimetric problem, *Amer. Math. Monthly* **112** no. 6 (2005), 526–566. doi:10.2307/30037526.

[dC76] M. P. do Carmo, *Differential geometry of curves and surfaces*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1976.

[dC83] M. P. do Carmo, *Differentialgeometrie von Kurven und Flächen*, Vieweg, Braunschweig, 1983. doi:10.1007/978-3-322-85494-0.

[Che67] S. S. Chern, Curves and surfaces in Euclidean space, in *Studies in Global Geometry and Analysis*, Math. Assoc. Amer., 1967, pp. 16–56.

[Küh10] W. Kühnel, *Differentialgeometrie*, 5. Auflage, Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2010. doi:10.1007/978-3-8348-9655-1.

[Mas77] W. S. Massey, *Algebraic topology: an introduction*, Springer, New York, Heidelberg, 1977.

[Sak96] T. Sakai, *Riemannian geometry*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.

[Tap16] K. Tapp, *Differential geometry of curves and surfaces*, Springer, 2016. doi:10.1007/978-3-319-39799-3.