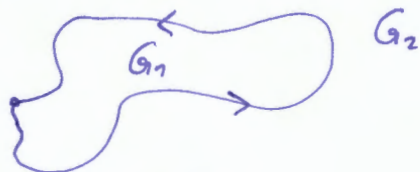


## Vorab ein paar Sätze

### 1.) Jordanscher Kurvensatz:

eine einfache Kurve in  $\mathbb{R}^2$  zerlegt  $\mathbb{R}^2$  in genau zwei Zusammenhangskomponenten. "einfach" heißt:  $c: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^2$

ist auf  $[0,1)$  injektiv;  
 $c(0) = c(1)$



$$G_1 \cup G_2 \cup c([0,1]) = \mathbb{R}^2$$

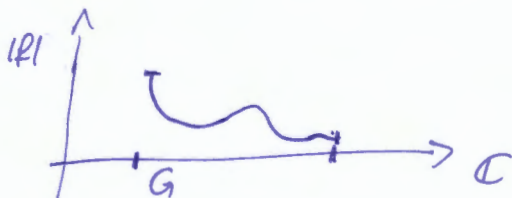
↑    ↑  
zusammenhängend.

### 2.) Maximumsprinzip:

Sei  $f$  holomorph im Gebiet  $G$  und stetig auf  $\bar{G}$ .

↑  
offen & nichtleer

Dann nimmt  $|f|$  ihr Maximum <sup>in  $\bar{G}$</sup>  auf  $\partial G$  an:  $|f(z)| \leq \sup_{\xi \in \partial G} |f(\xi)| \quad \forall z \in \bar{G}$



## Quadratische Polynome & Motivation

Sei  $f \in \mathbb{C}[x]$  beliebig mit  $\deg f = 2$ .

Fasse vermöge des Einsetzungshomomorphismus  $f$  als Abb auf:

$$\boxed{f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \\ z \mapsto \alpha z^2 + \beta z + \gamma}$$

Wir wollen nun zeigen, dass es ausreicht Julia-Mengen  $J(f_c)$  von Polynomen der Form  $f_c = z^2 + c$  zu betrachten, um effektiv alle Julia-Mengen quadratischer Polynome zu studieren.

Dies motiviert dann,  $J(f_c)$  genauer zu untersuchen.

Betrachte  $h(z) = az + b$ ,  $h^{-1}(z) = \frac{z-b}{a}$ ;  $a \neq 0$

$$\Rightarrow (h \circ f \circ h^{-1})(z) = a \cdot \alpha \cdot z^2 + (2b\alpha + \beta)z + \frac{\alpha b^2 + (\beta - 1)b + \gamma}{a}$$

Wähle:  $a = \frac{1}{2}$

$$b = \frac{-\beta}{2\alpha}$$

$$c = \frac{\alpha b^2 + (\beta - 1)b + \gamma}{a} \quad (\text{da } \gamma \text{ beliebig ist, ist } c \text{ beliebig})$$

$$\Rightarrow (h \circ f \circ h^{-1})(z) = z^2 + c =: f_c \quad ; \quad c \in \mathbb{C}$$

Es folgt:  $h^{-1} \circ f_c \circ h = f$

$$\Rightarrow h^{-1} \circ f_c^{(k)} \circ h = f^{(k)} \quad ; \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (\text{dabei steht } f^{(k)} \text{ für die } k\text{-fache Iteration } \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{k\text{-mal}})$$

und mithin gilt:

$$f^{(k)}(z) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \infty \iff f_c^{(k)}(h(z)) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \infty$$

Da  $h: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  biholomorph ist, genügt es also tatsächlich nur Julia-Mengen der Form  $J(f_c)$  zu betrachten, um  $J(f)$  für beliebige quadr. Polynome  $f$  zu studieren, denn  $J(f) \cong J(f_c)$

Erinnerung:  $J(f) := \{z \in \mathbb{C} \mid f^{(k)}(z) \not\xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \infty\}$

Im Folgenden wollen wir die Mandelbrotmenge einführen, um  $J(f_c)$  zu klassifizieren.

## Die Mandelbrot-Menge

Definition 1, Die Mandelbrot-Menge  $M$  sei wie folgt definiert:

$$M := \{c \in \mathbb{C} \mid J(f_c) \text{ ist zusammenhängend}\}$$

$M$  enthält jedoch weit mehr Informationen über  $J(f_c)$ , als man vlt. zunächst vermuten würde, mehr dazu auf der folgenden Seite. (S. 2.1)

Es zeigt sich, dass die Visualisierung der Mandelbrot-Menge ein wichtiger Bestandteil ihrer Untersuchung ist, da die zu  $M$  korrespondierende Geometrie eng mit den Eigenschaften von  $J(f_c)$  verbunden ist. (auch hierzu ist auf der folgenden Seite mehr zu finden)

Hierfür bietet sich eine alternative Definition von  $M$  an, welche aber auch ganz allgemein interessante Eigenschaften von  $J(f_c)$  offen legt.

Satz 2:

$$M = \{c \in \mathbb{C} \mid \{f_c^{(k)}(0)\}_{k=1}^{\infty} \text{ ist beschränkt}\}$$

Den Beweis wollen wir später führen:

Zunächst zur Anwendung:

Bemerkung 3 (der „Escape time Algorithm“)

Lemma A Sei  $|z| > 2$  und  $|z| \geq |c|$ . Dann gilt:

$$|f_c(z)| > |z|, \text{ mithin: } f_c^{(k)}(z) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$$

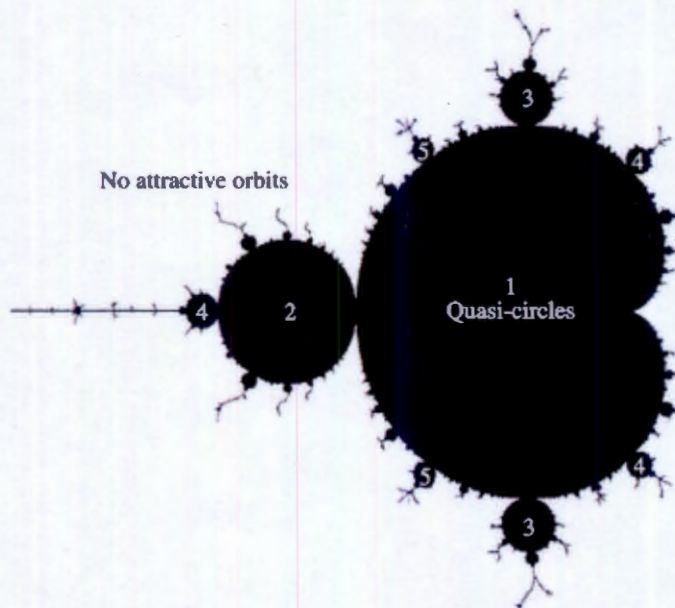
Bew.: Helmbert § 3.2.4

«der Algorithmus ist auf der (aber)nächsten Seite erklärt»



---

Ein Computergeneriertes Bild der Mandelbrot Menge:



Anmerkung:

Die Zahlen in den einzelnen Bereichen stehen für die Periode des Orbits der korrespondierenden Julia Mengen, und die Julia Mengen  $\mathcal{J}(f_c)$ , deren  $c$  in der der 1 zugehörigen Umgebung liegt, sind homöomorph zu  $S^1$ .

**Quelle:**

Falconer, „Fractal Geometry”, 3te Auflage.

Der "Escape Time Algorithm" zeichnet  $M$  nun wie folgt:

(I) Starte bei  $z=0$ .

• Iteriere 1-mal vermöge  $f_c \mapsto f_c(0) = c$

→ Falls  $|f_c(0)| > 2$ : Färbe dieses  $c$  in Farbe (I)

→ Falls  $|f_c(0)| < 2$ : Fahre fort mit (II)

(II) Starte bei  $z = f_c(0)$ , gehe vor wie in (I)

→ Falls  $|f_c^2(0)| > 2$ : Färbe dieses  $c$  in Farbe (II)

→ Falls  $|f_c^2(0)| < 2$ : iteriere weiter ...

Der Algorithmus stoppt nach  $B$  Iterationen, und färbt alle  $c$  mit  $|f_c^B(0)| \leq 2$  schwarz.

Nach dem vorigen Lemma und Satz 2 ist klar, dass dies ein approximatives Bild von  $M$  liefert.

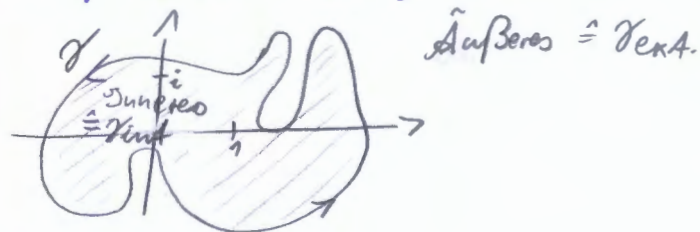
† Bilder im Anhang 1

Bevor wir Satz 2 zeigen können bedarf es etwas technischer Vorarbeit. (Der Jordansche Kurvensatz rechtfertigt die folgende Def)

Definition 4 Eine Kurve  $\gamma: [0,1] \rightarrow \mathbb{C}$  heißt Schleife, falls  $\gamma \in \mathcal{C}^\infty$ ,  $\gamma(0) = \gamma(1)$  und  $\forall t_0 \neq t_1 \in [0,1] \gamma(t_0) \neq \gamma(t_1)$  gilt.

Im Folgenden sei  $\gamma_i = \text{Im} \gamma$ .

Wir führen (gemäß der Skizze) noch die Begriffe "Äußeres" und "Inneres" von  $\gamma$  ein:

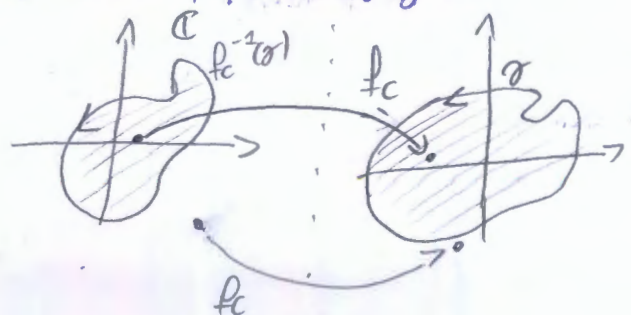


Lemma 5: Sei  $\gamma$  eine Schleife, und sei  $c \in X_{\text{int}}$ .

Dann ist  $f_c^{-1}(\gamma)$  eine Schleife, und es gilt:

(i)  $f_c(f_c^{-1}(\gamma)_{\text{int}}) = X_{\text{int}}$

(ii)  $f_c(f_c^{-1}(\gamma)_{\text{ext}}) = X_{\text{ext}}$



Beweis: Falconer § 14.13



Wir können nun die Äquivalenz von Def 1 und 2 beweisen.

(i)  $\{f_c^k(0)\}_{k=1}^{\infty}$  ist beschränkt  $\Rightarrow J(f_c)$  ist ygh.

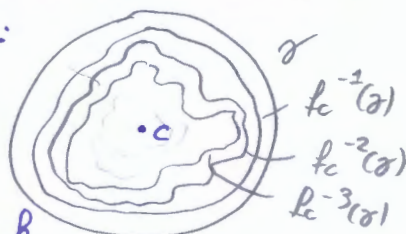
$\Rightarrow$  Sei  $\gamma = \partial B_{2+\varepsilon}(0)$ ,  $\varepsilon > 0$  derart, dass  $\forall k \in \mathbb{N}_0$   $\{f_c^k(0)\} \in \gamma_{\text{int}}$  gilt,  
und  $f_c^{-1}(\gamma_{\text{int}}) \not\subset \gamma_{\text{int}}$  gilt.

(So eine Wahl ist tatsächlich möglich, wie in „Helmutberg § 3.3.2“ gezeigt wird.)

Da  $c = f_c(0) \in \gamma_{\text{int}}$  folgt mit Lemma 5, dass  $f_c^{-1}(\gamma)$  eine Schleife ist.

Es gilt:  $c \in f_c^{-1}(\gamma)_{\text{int}}$ , sonst wäre  $f_c(c) = f_c^2(0) \notin \gamma_{\text{int}}$  &  
Induktives Fortfahren liefert eine Folge von Schleifen,  
welche ineinander enthalten sind:

$$\text{Sei } \mathcal{H} := \bigcap_{k \in \mathbb{N}_0} \overline{f_c^{-k}(\gamma)_{\text{int}}}$$



Es folgt:  $z \in \mathcal{H} \Rightarrow f_c^k(z) \in \gamma_{\text{int}} \forall k$

$z \notin \mathcal{H} \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}_0$ , mit  $z \in f_c^{-k}(\gamma)_{\text{ext}}$

$\Rightarrow f_c^k(z) \in \gamma_{\text{ext}}$

$\Rightarrow f_c^k(z) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$ , denn  $|f_c^k(z)| > 2$  und  $|f_c^k(z)| \geq |c|$   
vgl. Lemma 4

$$\Rightarrow J(f_c) = \partial \mathcal{H}$$

Weiter ist  $\mathcal{H}$  wegzgh., was wir an dieser Stelle ohne Bew.  
annehmen.

Da jede geschlossene Kurve in  $\mathcal{H}$  nullhomotop ist, ist damit  
 $\mathcal{H}$  einfach zusammenhängend, also ist  $\partial \mathcal{H} = J(f_c)$   
zusammenhängend.

(ii)  $[J(f_c)$  ist ygh  $\Rightarrow \{f_c^k(0)\}_{k=1}^{\infty}$  ist beschränkt] folgt analog.

ist jedoch etwas technischer.

Es sei auf Falconer § 14.14 verwiesen. □

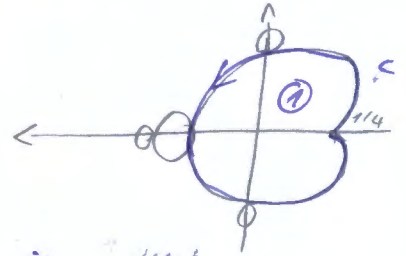
Wir wollen uns nun ein paar Eigenschaften der Julia-Mengen  $J(f_c)$   
rückmen.

Satz 6: Sei  $c: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$  die das Gebiet  $\mathcal{D}$  ( $\rightarrow$  Zettel 2.2)

$$z \mapsto \frac{1}{2} e^{i\theta} (1 - \frac{1}{2} e^{i2\theta})$$

berandende Kurve

Dann gilt:  $c \in C_{int} \Rightarrow \mathcal{J}(f_c) \cong \mathbb{S}^1$



$\gamma$  berandet tatsächlich dieses Gebiet, wie z.B. in "Heilmberg § 3.2" gezeigt wird.

Der Beweis lässt sich ähnlich wie der vorangegangene führen, und soll hier nur skizziert werden:

$\Rightarrow$  Sei  $c \in C_{int}$ .

Wähle eine Kurve  $\gamma$  derart, dass  $c \in \gamma_{int}$ ,  $w \in \gamma_{int}$  und

$f_c^{-1}(\gamma)_{int} \neq \gamma_{int}$  gilt. (Wir wollen ohne Bew annehmen, dass dies möglich ist)

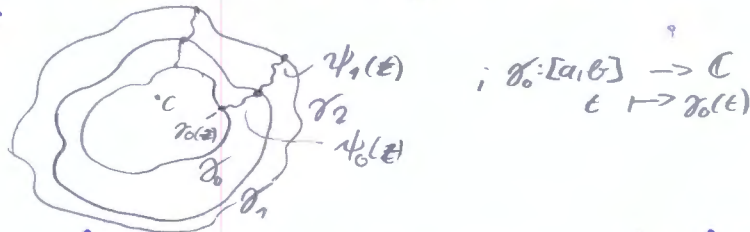
Dabei ist  $w$  der attraktive Fixpunkt von  $f_c$ .

Wir konstruieren so eine Folge  $\gamma_k := f_c^{-k}(\gamma)$  von Schleifen derart, dass

$(\gamma_k)_{int} \subset (\gamma_{k+1})_{int} \quad \forall k \in \mathbb{N}$  gilt. (Lemma 5 garantiert, dass  $f_c^{-k}(\gamma)$  Schleife ist)

Es lassen sich nun Kurven  $\psi_k^\varepsilon: \gamma_k(\varepsilon) \rightarrow \gamma_{k+1}(\varepsilon) \quad \forall k$  konstruieren.

Anschaulich:



Es gilt:

$\gamma_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \partial D(w)$ ;  $D(w) = \{z \in \mathbb{C} \mid f_c^k(z) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} w\}$ , denn:

(i)  $x \notin \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \gamma_{k,int}$ ;  $\exists A: f_c^k(x) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} w$

$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}_0$  mit  $f_c^k(x) \in \gamma_{k,int} \Rightarrow f_c^{-k}(f_c^k(x)) = x \in \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \gamma_{k,int}$



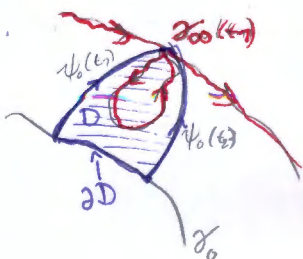
(ii)  $x \in \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \gamma_{k,int} \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}_0$  mit:  $f_c^m(x) \in \gamma_{k,int} \quad \forall m \geq k$

$\Rightarrow x \in \{z \in \mathbb{C} \mid f_c^k(z) \rightarrow \infty\} =: \mathcal{H}$ ;  $\partial \mathcal{H} = \partial D(w) \stackrel{F}{=} \mathcal{J}(f_c)$

$\Rightarrow x \in D(w)$   
Falcons  
 $\mathcal{J}^1$  ggl.

und da  $d(\gamma_k, \gamma_{k+1}) \rightarrow 0$ , konvergieren die Kurven  $\psi_k$  ebenfalls gegen  $\partial D(w) = \mathcal{J}(f_c)$  ( $\leftarrow$  Falconer § 14.1)

Es zeigt sich, dass wir die Kurven  $\psi_k^\varepsilon \quad \forall k$  derart wählen können, dass, falls  $\gamma_0(\varepsilon_1) = \gamma_0(\varepsilon_2)$  für  $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2 \in (a, b)$  gegeben ist folgendes gilt (Skizze):



Dabei entsteht  $\psi_0^{\varepsilon_1}$  bzw.  $\psi_0^{\varepsilon_2}$  durch verkleben geeigneter  $\psi_k^{\varepsilon_1}$  ( $\psi_k^{\varepsilon_2}$ ). Damit bleibt  $\partial D$  unter Iteration von  $f_c$  beschränkt ( $\mathcal{D} \rightarrow$  Skizze), und nach dem Maximumsprinzip muss auch  $\mathcal{D}$  beschränkt bleiben.

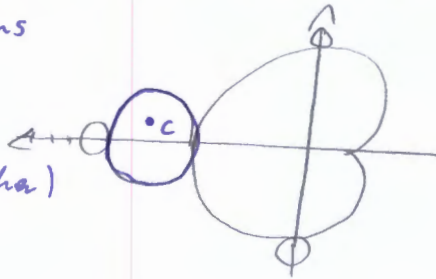
Damit muss aber  $D \subseteq \{z \in \mathbb{C} \mid f_c^k(z) \rightarrow \infty\}$  gelten, und somit kann  $J(f_c)$  keine echte Teilmenge von  $D$  sein.  
 Also muss  $\sigma_\infty = J(f_c) \equiv \mathbb{C}^1$  gelten □

Es lassen sich noch viele weitere interessante Eigenschaften von Julia Mengen finden, ein paar seien im Folgenden (ohne Beweis) aufgeführt:

- Falls  $c \notin \mathbb{M}$ , so folgt:  $J(f_c)$  ist total unzusammenhängend  
 also:  $J(f_c)$  ist entweder zusammenhängend oder total unzusammenhängend.
- Falls  $f_c^k(0) = f_c^{k+1}(0)$ , so besitzt  $J(f_c)$  keine "Löcher", ist  
 aber von folgender Form:



- Angenommen, der periodische Orbit von  $f_c$  besitzt eine Periode von 2.  
 Dann gilt  $|c+1| < \frac{1}{4}$ , mithin liegt  $c$  in folgender Region von  $\mathbb{M}$ :  
 Und  $J(f_c)$  besteht aus unendlich vielen geschlossenen Kurven (hat also  $\infty$ -viele Löcher)



Die Komplexität der Julia-Mengen macht man sich am besten mithilfe eines Computers klar.

Dies kann analog zur Visualisierung von  $\mathbb{M}$  geschehen.

Hier werde aber  $c$  fixiert, und es wird getestet ob Punkte  $z \in \mathbb{C}$  unter  $f_c$  Iteration divergieren.

Offenbar liefert dies aber ein approximatives Bild von  $\{z \in \mathbb{C} \mid f_c^k(z) \rightarrow \infty\} = \mathbb{H}$ ,  
 also  $J(f_c) = \partial \mathbb{H}$ .

Um  $\mathbb{H}$  "herauszuschneiden" muss man sich ein paar Tricks bedienen, was hier aber nicht ausgeführt werden soll.

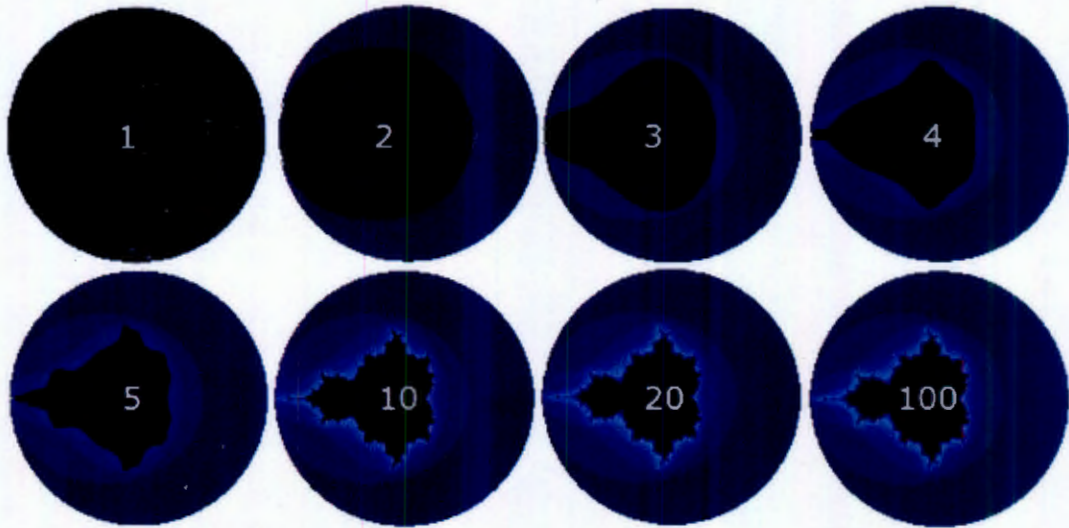
Der Algorithmus lässt sich z.B. in Glebsberg § 3.4.2 finden.

Im Anhang finden sich computergenerierte Bilder verschiedener Julia-Mengen.



---

Zeichnen der Mandelbrot Menge vermöge des „Escape Time Algorithm“



Anmerkung:

Die Zahl der Bilder steht für die Anzahl der  $f_c$  Iterationen.

Die Einzelnen Blautöne korrespondieren zu der Anzahl der Iterationen, nach welchen  $|f_c(0)^k| \geq 2 + \varepsilon$  gilt. Oder anders formuliert spiegeln die Farben wieder, wie „schnell“  $f_c$  divergiert. Je heller die Farbe, umso langsamer divergiert  $f_c$ .

Computergenerierte Bilder verschiedener Julia Mengen.

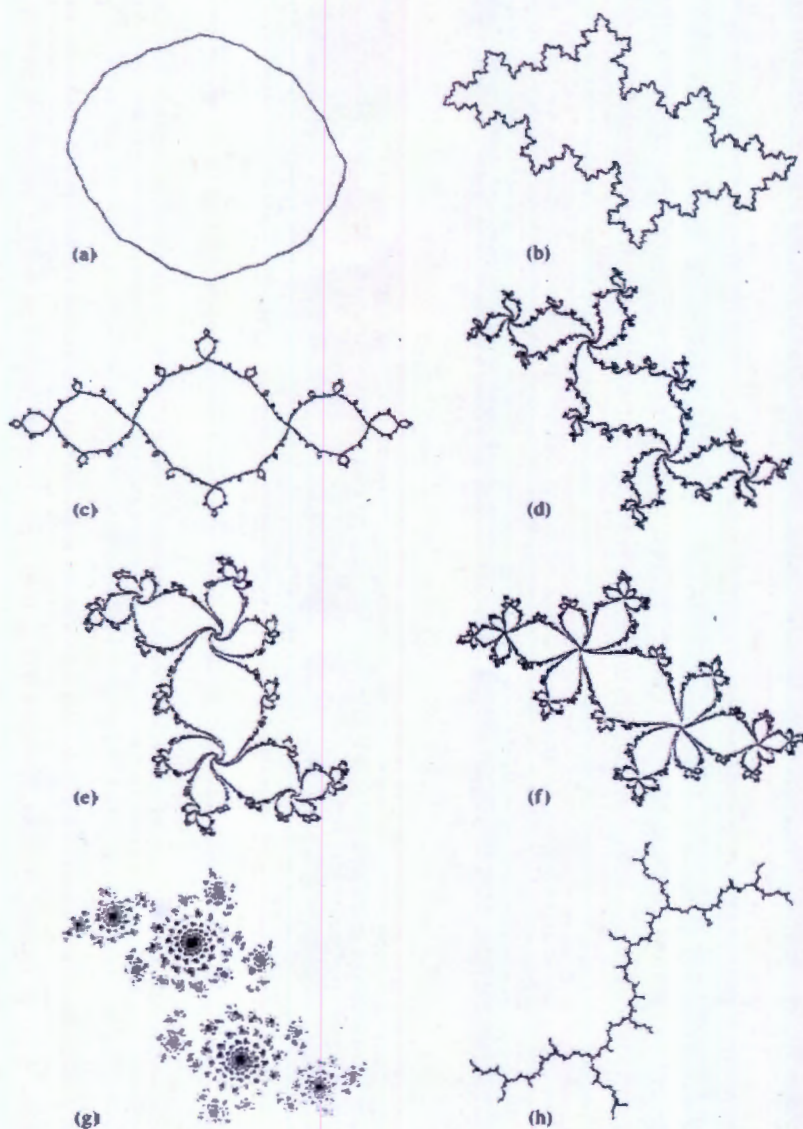


Figure 14.7 A selection of Julia sets of the quadratic function  $f_c(z) = z^2 + c$ . (a)  $c = -0.1 + 0.1i$ ;  $f_c$  has an attractive fixed point, and  $J$  is a quasi-circle. (b)  $c = -0.5 + 0.5i$ ;  $f_c$  has an attractive fixed point, and  $J$  is a quasi-circle. (c)  $c = -1 + 0.05i$ ;  $f_c$  has an attractive period-2 orbit. (d)  $c = -0.2 + 0.75i$ ;  $f_c$  has an attractive period-3 orbit. (e)  $c = 0.25 + 0.52i$ ;  $f_c$  has an attractive period-4 orbit. (f)  $c = -0.5 + 0.55i$ ;  $f_c$  has an attractive period-5 orbit. (g)  $c = 0.66i$ ;  $f_c$  has no attractive orbits and  $J$  is totally disconnected. (h)  $c = -i$ ;  $f_c^2(0)$  is periodic and  $J$  is a dendrite.

Quelle:

Falconer, „Fractal Geometry”, 3te Auflage