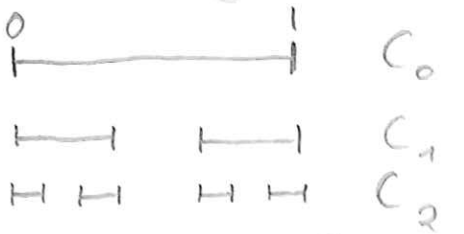
Hausdorffmaß und -Dimension

0. Vorbemerkungen

(i) Im Vortrag seien (X, d_X), (Y, d_Y) beliebige metrische Räume.

(ii) Für $A \subseteq X$ definiere $|A| = \sup\{d_X(x,y) \mid x,y \in A\}$ als den Durchmesser von A und nenne $(U_i)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq X$ δ-Überdeckung von A, wenn $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} U_i \supseteq A$, $|U_i| \leq \delta$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

(iii) Konstruktion der Cantormenge $\mathbf{C}$: Sei $U_0 = \emptyset$, $U_1 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, $U_{i+1} = \{x, \frac{x}{3}, \frac{2x}{3} \mid x \in U_i\}$ für $i \geq 1$. Setze dann $C_i = [0,1] \setminus U_i$ und



$C = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} C_i$. C_i besteht dann offenbar aus 2^n disjunkten abgeschlossenen Intervallen der Länge 3^{-n}.

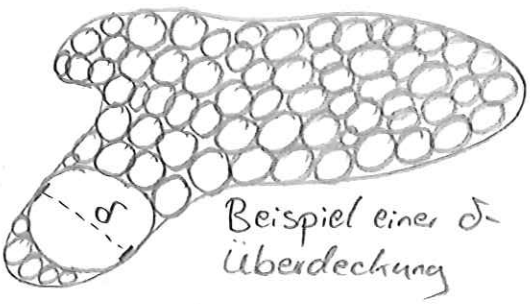
(iv) Besicovitch-Covering-Theorem:
Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $H^n(A) < \infty$, $\mathfrak{F}$ eine Ansammlung nicht-trivialer abgeschlossener Bälle, sodass $\inf\{r \mid B_r(a) \in \mathfrak{F}\} = 0$ für alle $a \in A$. Dann existiert eine abzählbare Teilmenge E disjunkter Bälle von $\mathfrak{F}$, sodass $H^n(A \setminus \bigcup E) = 0$

1. Definition des Hausdorffmaßes

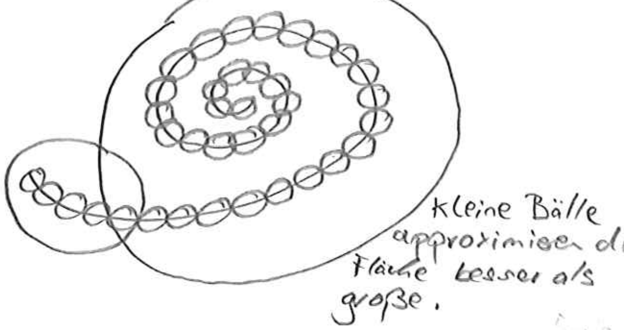
Für $A \subseteq X$, $s \geq 0$, $\delta > 0$ definiere $H^s_\delta(A) = \inf\left\{ \sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha_s \left(\frac{|U_i|}{2}\right)^s \;\middle|\; (U_i)_{i\in\mathbb{N}} \text{ ist eine } \delta\text{-Überdeckung von } A \right\}$, wobei $\alpha_s = \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(\frac{s}{2}+1)}$. α_s approximiert das Volumen des s-dim. Balles mit Radius 1. Da für $\delta < \varrho$ $H^s_\delta(A) \geq H^s_\varrho(A)$ gilt, existiert $\lim_{\delta\to 0} H^s_\delta(A) =: H^s(A) \in [0,\infty]$ und wir nennen den Grenzwert das s-dim. Hausdorffmaß von A.

<u>Satz</u> Für $s \geq 0$ ist $H^s : \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ ein äußeres Maß, d.h.
$H^s(\emptyset) = 0$, $A \subseteq B \Rightarrow H^s(A) \leq H^s(B)$, $H^s(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i) \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} H^s(A_i)$ ■

(a)



(b)



2. Eigenschaften des Hausdorffmaßes

<u>Lemma</u> (Hölder Eigenschaft)
Sei $A \subseteq X$ und $f: A \to Y$ eine Abbildung, sodass für alle $x, y \in A$ gilt: $d_Y(f(x), f(y)) \le c \cdot d_X(x,y)^\beta$ für Konstanten $c, \beta > 0$. Dann gilt $H^{s/\beta}(f(A)) \le d_{c,s,\beta} \cdot H^s(A)$ für alle $s \ge 0$, wobei $d_{c,s,\beta} := \frac{\alpha_{s/\beta}}{\alpha_s} 2^{s - s/\beta} c^{s/\beta}$.

<u>Bem</u> Für Lipschitz-stetige Abb. gilt $H^s(f(A)) \le c^s H^s(A)$.

<u>Beweis</u> Sei $\varepsilon > 0$ beliebig, * $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine δ-Überdeckung von A, sodass

$H^s_\delta(A) + \varepsilon' \ge \sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha_s \left(\frac{|U_i|}{2}\right)^s$. Dann ist, da $|f(A\cap U_i)| \le c \cdot |A \cap U_i|^\beta$

$\le c|U_i|^\beta \le c\delta^\beta$, $(f(A\cap U_i))_{i\in\mathbb{N}}$ eine $c\delta^\beta$-Überdeckung von $f(A)$

* $\varepsilon' := \frac{\varepsilon}{d_{c,s,\beta}}$

und es gilt $H^{s/\beta}_{c\delta^\beta}(f(A)) \le \sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha_{s/\beta} \left(\frac{|f(A\cap U_i)|}{2}\right)^{s/\beta} \le \alpha_{s/\beta} \frac{1}{2^{s/\beta}} \sum_{i\in\mathbb{N}} |f(A\cap U_i)|^{s/\beta}$

$\le \frac{\alpha_{s/\beta}}{\alpha_s} \frac{2^s}{2^{s/\beta}} c^{s/\beta} \sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha_s \frac{|U_i|^s}{2^s} \le d_{c,s,\beta} (H^s_\delta(A) + \varepsilon')$. Für $\delta \to 0$ folgt

$H^{s/\beta}(f(A)) \le d_{c,s,\beta} (H^s(A) + \varepsilon)$ und die Beh, da $\varepsilon > 0$ beliebig war. ∎

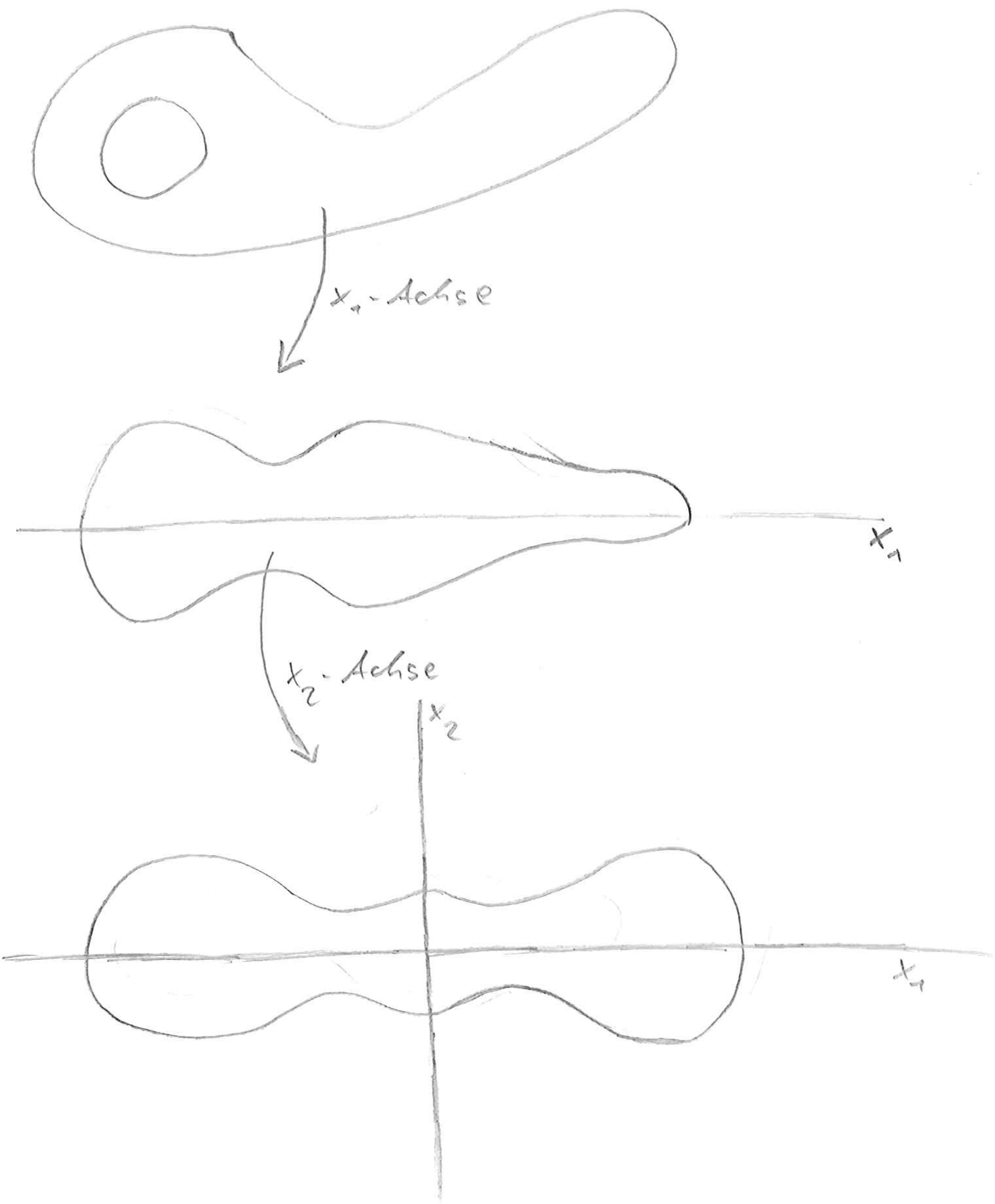
<u>Korollar</u> (Skalierungseigenschaft)
Sei $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ def. durch $x \mapsto \lambda x$ für ein $\lambda > 0$.
Dann gilt für $A \subseteq \mathbb{R}^n$: $H^s(f(A)) = \lambda^s H^s(A)$.

<u>3. Theorem</u> Für $A \subseteq \mathbb{R}^n$ Lebesgue-messbar gilt $H^n(A) = \mathcal{L}^n(A)$

<u>Beweis</u> Œ sei A beschränkt.

<u>1. Schritt:</u> $H^n \ge \mathcal{L}^n$: Wir zeigen, dass $\mathcal{L}^n(A) \le \alpha_n \left(\frac{|A|}{2}\right)^n$ gilt. Daraus folgt $\mathcal{L}^n(A) \le H^n(A)$ direkt. Zunächst transformieren wir $A \rightsquigarrow A^s$ mit der sogenannten Steiner-Symmetrization bzgl jeder Koordinatenachse. Es lässt sich leicht $\mathcal{L}^n(A) = \mathcal{L}^n(A^s)$, $|A| \ge |A^s|$ und $A^s \subseteq B^n_{|A|}(0)$ zeigen. Also gilt
$\mathcal{L}^n(A) = \mathcal{L}^n(A^s) \le \alpha_n \left(\frac{|A|}{2}\right)^n$.

Grafik zur Steiner-Symmetrization



2. Schritt: $H^n \leq \mathcal{L}^n$: OE $A = B_1(0)$, da sich jede messbare Menge als Vereinigung von Bällen darstellen lässt. Offenbar gilt $H^n(B_1(0)) < \infty$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle $\delta > 0$ so, dass $H^n(A) \leq H^n_\delta(A) + \varepsilon$. Benutze das Überdeckungstheorem für: $\mathcal{F} := \{\overline{B_\varrho(c)} \mid c \in A, \varrho \leq \delta, \overline{B_\varrho(c)} \subseteq A\}$. Es gibt also $G \subseteq \mathcal{F}$ mit paarweise disjunkten Bällen, sodass für $B := \bigcup G$ gilt: $H^n(A \setminus B) = 0$. Sei nun G' eine Überdeckung von $A \setminus B$ von Bällen mit Durchmesser $\leq \delta$, sodass gilt $\sum_{S \in G'} \alpha_n \left(\frac{|S|}{2}\right)^n \leq \varepsilon$. Dann überdeckt $G \cup G'$ A und es gilt $H^n(A) \leq H^n_\delta(A) + \varepsilon$

$$\leq \sum_{S \in G \cup G'} \alpha_n \left(\frac{|S|}{2}\right)^n + \varepsilon \leq \sum_{S \in G} \alpha_n \left(\frac{|S|}{2}\right)^n + \sum_{S \in G'} \alpha_n \left(\frac{|S|}{2}\right)^n + \varepsilon$$

$\leq \sum_{S \in G} \mathcal{L}^n(S) + 2\varepsilon \leq \mathcal{L}^n(A) + 2\varepsilon$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung. ∎

4. Die Hausdorff-Dimension

<u>Lemma A</u> Für $0 \leq s < t$ und $H^s(X) < \infty$, gilt $H^t(X) = 0$.

<u>Beweis</u> Sei $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine δ-Überdeckung von X. Dann gilt

$$\sum |U_i|^t = \sum |U_i|^{t-s} |U_i|^s \leq \delta^{t-s} \sum |U_i|^s, \text{ also}$$

$H^t_\delta(X) \leq \delta^{t-s} \cdot \frac{\alpha_t}{\alpha_s} \frac{2^s}{2^t} H^s_\delta(X)$ und für $\delta \to 0$ die Beh. ∎

<u>Lemma B</u> Für $0 \leq s < t$ und $H^t(X) > 0$, gilt $H^s(X) = \infty$ ∎

<u>Definition</u> Für einen metrischen Raum X nennen wir

$$\dim_H(X) = \inf\{s \geq 0 \mid H^s(X) = 0\} = \sup\{s \geq 0 \mid H^s(X) = \infty\}$$

die <u>Hausdorffdimension</u> von X.

<u>Korollar</u> (a) Sei $A \subseteq X$ und $f: A \to Y$ eine Abbildung, für die gilt: $d_Y(f(x), f(y)) \leq c \cdot d_X(x,y)^\beta$ für alle $x, y \in A$, feste $c, \beta > 0$. Dann gilt: $\dim_H f(A) \leq \frac{1}{\beta} \dim_H(A)$

(b) Falls f bi-Lipschitz ist, gilt $\dim_H f(A) = \dim_H A$ ∎

5. Bemerkungen und äquivalente Definitionen

(a) Sei M eine m-dim. Untermgf. des $\mathbb{R}^n$. Dann gilt $\dim_H M = m$ und $H^m(M)$ entspricht der Oberfläche von M.

(b) Man kann auch bloß Überdeckungen durch Bälle fordern.

(c) Man " — " offene/abgeschlossene Mengen fordern.

(d) Bei kompakten Räumen genügt es endliche Überdeckungen zu betrachten.

(e) Für $\tilde{H}^s(A) = \lim\limits_{\delta \to 0} \inf \{ \sum\limits_{i \in \mathbb{N}} |U_i|^s \mid (U_i)_{i \in \mathbb{N}} \text{ ist } \delta\text{-Überdeckung} \}$ gilt

$\dim_H(A) = \dim_{\tilde{H}}(A)$

6. Vergleich zur box-counting-dimension

Satz Für $A \subseteq X$, $A \neq \emptyset$, A beschränkt gilt $\dim_H A \leq \underline{\dim}_B A \leq \overline{\dim}_B A$

Beweis Sei $s \geq 0$ so, dass $1 < \tilde{H}^s(A) = \lim\limits_{\delta \to 0} \tilde{H}^s_\delta(A)$. Dann existiert $\delta > 0$ klein genug, sodass $1 < \tilde{H}^s_\delta(A)$. Mit der Def von $\tilde{H}^s_\delta$ folgt:

$H^s_\delta(A) \leq N_\delta(A) \cdot \delta^s$ (Für $N_\delta(A)$ vgl Vortrag 2). Damit folgt

$0 < \log N_\delta(A) + s \log \delta \Leftrightarrow s < \frac{\log N_\delta(A)}{-\log \delta}$, sodass $s \leq \underline{\lim}_{\delta \to 0} \frac{\log N_\delta(A)}{-\log \delta}$

Für alle s mit $1 < \tilde{H}^s(A)$, also $\dim_H A \leq \underline{\lim}_{\delta \to 0} \frac{\log N_\delta(A)}{-\log \delta} = \underline{\dim}_B A$ ▨

7. Die Hausdorffdimension der Cantormenge

Sei C die klassische Cantormenge.

Behauptung Es gilt $\dim_H C = \frac{\log 2}{\log 3}$ und $\frac{1}{2} \leq \tilde{H}^{\frac{\log 2}{\log 3}}(C) \leq 1$.

Heuristische Berechnung Schreibe $C = \underbrace{C \cap [0, \tfrac{1}{3}]}_{C_L} \,\dot\cup\, \underbrace{C \cap [\tfrac{2}{3}, 1]}_{C_R}$.

C_L und C_R sind geometrische Skalierungen von C mit $\lambda = \frac{1}{3}$.

Also gilt für alle $s \geq 0$: $H^s(C) = H^s(C_L) + H^s(C_R) = (\tfrac{1}{3})^s H^s(C) \cdot 2$.

Heuristisch gesehen gilt für $s_0 = \dim_H C$ $\; 0 < H^{s_0}(C) < \infty$, somit gilt $1 = 2(\tfrac{1}{3})^{s_0} \Rightarrow s_0 = \frac{\log 2}{\log 3}$

Beweis Sei $s_0 = \frac{\log 2}{\log 3}$.

1. Schritt $\tilde{H}^{s_0}(C) \le 1$: C_k ist eine Überdeckung von C. Es ist also
$\hat{H}^{s_0}_{3^{-k}}(C) \le (2^k 3^{-k})^{s_0} = 1$, also $\hat{H}^{s_0}(C) = \lim_{k \to \infty} \hat{H}^{s_0}_{3^{-k}}(C)$
≤ 1.

2. Schritt $\tilde{H}^{s_0}(C) \ge \frac{1}{2}$: Sei $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine beliebige Überdeckung von C.
Wir wollen $\sum_{i \in \mathbb{N}} |U_i|^{s_0} \ge \frac{1}{2} = 3^{-s_0}$ zeigen. OBdA dürfen wir uns auf endliche Überdeckungen von abgeschlossenen Intervallen dürfen, die in $[0,1]$ enthalten sind (C ist kompakt).
Sei also $(U_i)_{i=1,..,n}$ solch eine.
Wähle zu jedem $i \in \{1,..,n\}$ $k_i \in \mathbb{N}$ so, dass $3^{-(k_i+1)} \le |U_i| < 3^{-k_i}$. Dann schneidet U_i höchstens ein Intervall de Länge 3^{-k_i} von C_{k_i}. Weiter gilt für $j \ge k_i$, dass U_i höchstens
$2^{j-k_i} = 2^j 3^{-s_0 k_i} \le 2^j 3^{s_0} |U_i|^{s_0}$ Intervalle der Länge 3^{-j} von C_j schneidet. Wähle nun j so groß, dass $3^{-(j+1)} \le |U_i|$ für alle $i \in \{1,..,n\}$ gilt. Da $(U_i)_{i=1,..,n}$ alle 2^j Intervalle von C_j schneiden muss, gilt
$$2^j \le \sum_{i=1}^{n} 2^j 3^{s_0} |U_i|^{s_0} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} |U_i|^{s_0} \ge 3^{-s_0}.$$

∎

Bemerkung Man kann zeigen, dass $\hat{H}^{s_0}(C) = 1$, also
$H^{s_0}(C) = \frac{\alpha_{s_0}}{2^{s_0}}$ gilt.