Seminar Fraktale

§ 1 KLASSISCHE BEISPIELE
& ÄHNLICHKEITSDIMENSION

Überblick

§ 1.1 Fraktale Geometrie

§ 1.2 Typische Eigenschaften

§ 1.3 a) Cantor Menge
b) Cantor Staub

§ 1.4 a) Sierpinski-Dreieck
b) Sierpinski-Teppich
c) Menger Schwamm

§ 1.5 a) Koch Kurve
b) Koch Flocke

§ 1.6 Ähnlichkeitsdimension

§ 1.1 Fraktale Geometrie

Frage: *Wofür braucht man fraktale Geometrie?*

"Fraktale" Mengen, also irreguläre, nicht glatte, gebrochene (lat. "*fractus*") Mengen, liefern eine viel bessere Darstellung vieler Naturphänomene, als es die Figuren der klassischen Geometrie tun. Beispielsweise haben Wolken oder Berge unregelmäßige Muster, die von Rauheit, Brüchen oder Zersplitterung gekennzeichnet sind und sich nicht gut durch glatte Objekte beschreiben lassen.

Messung der Küstenlinie:

Der Mathematiker **Mandelbrot** (1924-2010) hat beim Versuch, die Länge der Küstenlinie Großbritanniens zu messen, festgestellt, dass das Messergebnis abhängig vom gewählten Maßstab und Grad der Detailliertheit ist: Die Küstenlinie ist länger, je genauer man misst, verhält sich also empirisch fraktal und hätte als ideales Fraktal die Länge unendlich.

Frage: Was ist ein Fraktal?

Es ist nicht leicht, eine genaue Definition für ein „Fraktal" anzugeben, da man häufig Gegenbeispiele findet, die trotzdem fraktales Verhalten aufweisen.

Daher schauen wir uns typische Eigenschaften an.

§ 1.2 Typische Eigenschaften eines Fraktals

Ein „Fraktal" lässt sich beschreiben als komplexe geometrische Figur mit:

(i) „gebrochener" Struktur

(ii) Feinstruktur

(iii) Skaleninvarianz

(d.h. es gibt Details auf allen Ebenen)

(iv) Selbstähnlichkeit

(d.h. ein Fraktal besteht aus Teilen, die dem Ganzen in einer Weise ähnlich sehen; nicht immer streng selbstähnlich sonden nur annähernd)

(v) fraktale Dimension gewöhnlich größer als topologische Dimension.

Nun führen wir einige klassische Beispiele ein:

§1.3. Cantor Menge

<u>Konstruktion</u>: die (Mittel-Drittel-) Cantor Menge C wird durch ein rekursives Verfahren konstruiert: als Folge von „Streichoperationen".

Die erste Menge in der Folge ist der <u>Initiator</u>

$$C_0 = [0,1] \subseteq \mathbb{R} \quad \text{(Einheitsintervall)}$$

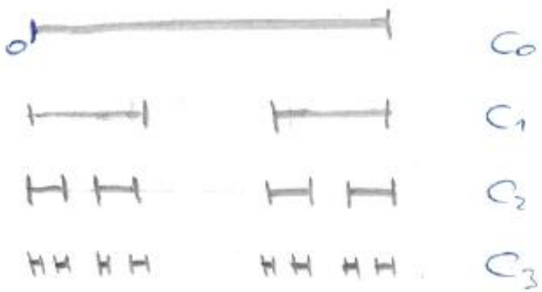
Von diesem wird das mittlere Drittel $(1/3, 2/3)$ entfernt:

$$C_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$$

Es entstehen 2 Intervalle von denen wieder je das mittlere Drittel entfernt wird:

$$C_2 = [0, 1/9] \cup [2/9, 3/9] \cup [6/9, 7/9] \cup [8/9, 1]$$

Skizze



Es gilt: $C_0 \supseteq C_1 \supseteq C_2 \supseteq \dots \quad (C_n \supseteq C_{n+1})$

und die Menge C_k (die nach k Streichoperationen entsteht) besteht aus 2^k Intervallen, jedes Intervall hat Länge $\frac{1}{3^k}$, also hat C_k Länge $(\frac{2}{3})^k$.

Die Cantormenge C ist definiert als der Schnitt

$$C = \bigcap_{k=0}^{\infty} C_k$$

Die Länge von C bzgl. des Lebesguemaßes

$$\mathcal{L}(C) = \mathcal{L}\left(\bigcap_{k=0}^{\infty} C_k\right) = \lim_{k\to\infty} \mathcal{L}(C_k)$$

$$= \lim_{k\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = 0$$

Die Länge ist also nicht nützlich, um die „Größe" von C zu bestimmen.

§1.3a)

Wir wollen uns jetzt anschauen, wie Punkte der Cantormenge C aussehen:

Bsp: Darstellung von Zahlen in Basis 3:

$$15 = 1 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^1 + 0 \cdot 3^0 = (1\,2\,0)_{\underset{\text{Basis}}{3}}$$

$$16 = 1 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0 = (1\,2\,1)_3$$

Wie folgt kann man auch Brüche darstellen:

für $x \in [0,1]$, $x \neq 0$ schreibe

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{3^k}, \quad x_k \in \{0,1,2\}$$

kurz: $x = (0.x_1 x_2 x_3 \dots)_3$

Jede endliche Summe der Form

$$x = (0.x_1 x_2 \dots 1)_3 = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{3^k} \qquad (x_n = 1)$$

lässt sich schreiben als

$$x = (0.x_1 x_2 \cdots x_{n-1} 0222\dots)_3 = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{x_k}{3^k} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{2}{3^k}$$

Bsp: $\frac{1}{3} = (0.1000\dots)_3 = (0.0222\dots)_3$

$\frac{2}{3} = (0.1222\dots)_3 = (0.2000\dots)_3$

Beh: C hat genau die Punkte $x \in [0,1]$ mit $x = (0.x_1 x_2 x_3 \dots)_3$, $x_k \in \{0,2\}$

Bew: die erste Stelle nach dem Komma ist 1 gdw. x zwischen $(0.1000\dots)_3 = 1/3$ und $(0.1222\dots)_3 = 2/3$ liegt, also dem Intervall, was vom Initiator C_0 entfernt wird.
(Bem: da $1/3$ und $2/3$ auch ohne „1" geschrieben werden können, bleiben diese erhalten.)
Die zweite Stelle nach dem Komma ist 1 gdw. x zwischen $1/9$ und $2/9$ oder $7/9$ und $8/9$ liegt, also den Intervallen, die entfernt werden, um C_2 zu erhalten. usw.

$\Rightarrow$ D.h. alle Punkte in $[0,1)$, die in der Darstellung zur Basis 3 eine 1 enthalten, werden in der rekursiven Konstruktion von C „gestrichen".
Der Rest bildet die Cantormenge C.

§1.3 2)

Nun schauen wir uns Eigenschaften der Cantormenge an:

Beh: Die Cantormenge C ist in sich dicht, d.h. jeder Punkt ist Häufungspunkt.

Bew: Sei $x \in C$, $\varepsilon > 0$ beliebig.

Wähle $n \in \mathbb{N}$ mit: $\frac{1}{3^n} < \varepsilon$.

Es gibt nun die Darstellung zur Basis 3:

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{3^k} \quad \text{mit } c_k \neq 1 \text{ für } k \in \mathbb{N}.$$

$\Rightarrow$ Dann ist auch

$$y = \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{3^k} \in C$$

Es gilt:

$$|x-y| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{3^k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{3^k} \right| = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{c_k}{3^k}$$

$$\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{2}{3^k} = \frac{2}{3^{n+1}} \cdot \frac{1}{1-1/3}$$

$$= \frac{1}{3^n} < \varepsilon$$

$\Rightarrow$ Somit liegt y in der ε-Umgebung von x.

Da ε bel. war, liegt in jeder Umgebung von x ein Element von C. $\Rightarrow$ x ist HP $\square$

Beh: C ist überabzählbar

Bew: Definiere Funktion

$$\varphi: C \longrightarrow [0,1]$$

$$x \longmapsto \varphi\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{3^k}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k/2}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{2^{k+1}}$$

φ überführt also den Bruch in Basis 3 der nur aus Nullen und Zweien besteht, in einen Bruch in Basis 2, indem 0 auf 1 und 2 auf 1 abgebildet wird.

z.B. $\frac{1}{4} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3^{2k}} = (0.020202\ldots)_3$

$\rightsquigarrow \varphi\left(\frac{1}{4}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2/2}{2^{2k}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^k} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1-1/4} = 1/3$

bzw. $\varphi((0.020202\ldots)_3) = (0.010101\ldots)_3$

φ ist stetig auf C und monoton steigend, insgesamt surjektive Abb. auf $[0,1]$ (und sogar auf $\mathbb{R}$)

$\Rightarrow$ C ist somit überabzählbar. $\square$

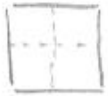
(weitere) Eigenschaften der Cantormenge C:

- überabzählbar unendlich
- total unzusammenhängend
- kompakt
- nirgends dicht
- perfekt: (als Schnitt über abgeschl. Mengen) abgeschlossen ohne isolierte Punkte
- jeder Punkt ist Häufungspunkt
- selbstähnlich
- Inneres ist leer

b) Cantor Staub

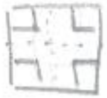
Ähnlich wie die Cantormenge entsteht auch der Cantor-Staub durch ein rekursives „Streichverfahren".

- Initiator: Einheitsquadrat A_0 (mit Seitenlänge 1)



A_0

A_1 entsteht, indem man das Quadrat in 4 gleichgroße Quadrate unterteilt, aus denen man je ein (Teil-) Quadrat herausschneidet der Länge $a < 1/2$, der Rest wird „gestrichen".



A_1

- $A_k \subset A_{k-1}$ besteht aus 4^k Quadraten der Seitenlängen a^k $(a < 1/2)$, Gesamtfläche: $4^k (a^k)^2 = (2a)^{2k}$
- Der Cantorstaub ist definiert als:
  $$A := \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$$
- für $a = 1/4$: jedes (verbleibende) Quadrat wird in genau 16 gleichgroße Quadrate aufgeteilt, von denen 4 behalten werden.

§ 1.4 a) Sierpinski Dreieck

- entsteht wieder durch „Streichverfahren"
- Initiator: (ausgefülltes) gleichseitiges Dreieck der Seitenlänge 1

S_0, S_1, S_2

- pro Iteration entstehen aus jedem Dreieck 3 neue (Unter-) Dreiecke (mittleres wird entfernt) mit je halber Seitenlänge

Bem: Es wird nur das Innere, d.h. ohne Rand, entfernt.

- $S_0 \supset S_1 \supset S_2 \supset \ldots$
- $S := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} S_k$
- Eine Menge S_k besteht aus 3^k Dreiecken mit je Seitenlänge $1/2^k$

↳ Gesamtfläche: $3^k \cdot (2^{-k})^2 \cdot \sqrt{3}/4 \xrightarrow{k \to \infty} 0$

- Länge des Sierpinski-Dreiecks:

$$3^k \cdot 3 \cdot \frac{1}{2^k} \xrightarrow{k \to \infty} \infty$$

⇒ Das Sierpinski-Dreieck hat also unendlich großen Umfang, aber keinen Flächeninhalt.

§1.4 b) Sierpinski-Teppich T

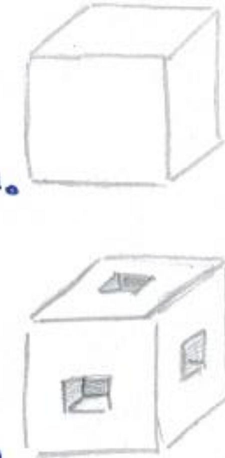
T_0, T_1, T_2

- „Streichverfahren"
- Initiator T_0: Einheitsquadrat (Seitenlänge 1)
- Jedes Quadrat wird in 9 gleichgroße Quadrate geteilt, von denen das mittlere entfernt wird.
- Flächeninhalt:

$$\left(\tfrac{8}{9}\right)^k \xrightarrow{k \to \infty} 0$$

c) Menger Schwamm:

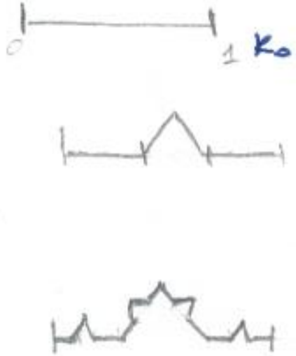
- Initiator: Einheitswürfel
- analog zu den obigen Beispielen in 3 dim.
- Oberfläche wird unendlich groß, Volumen wird 0



M_0, M_1

§ 1.5 a) Koch-Kurve

- Initiator: Strecke d. Länge 1



K_0, K_1, K_2

- Bei jedem Iterationsschritt wird das mittlere Drittel eines jeden Intervalls entfernt und durch die beiden anderen Seiten eines gleichseitigen Dreiecks ersetzt

- K_n besteht aus 4^n Teillinien der Längen $\frac{1}{3^n}$
  d.h. Gesamtlänge
  $$\left(\frac{4}{3}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$$

- Aber die Fläche (die eingeschlossen wird mit dem Einheitsintervall
  $A = \frac{\sqrt{3}}{20}$ ist endlich

$\Rightarrow$ Die Kochkurve ist also unendlich lang, aber schließt (mit dem Einheitsintervall) eine endliche Fläche ein.
Außerdem ist sie stetig, aber an keinem Punkt differenzierbar.
(denn sie besitzt unendl. viele „Knickstellen")

b) Koch-Flocke

- sieht aus wie eine Schneeflocke

F_0, F_1

- aus 3 Kochkurven zusammengesetzt

- Initiator: gleichseitiges Dreieck
  ↳ an jeder Seite wird das Iterationsverfahren der Koch kurve angewandt

- Für $n \to \infty$ hat die Kochkurve einen endlichen Flächeninhalt, aber unendlichen Umfang.

- Fläche $\frac{2\sqrt{3}}{5}$ (bei Seitenlänge 1)

§ 1.6 Ähnlichkeitsdimension

Grobe Bedeutung eines Dimension:

Beschreibung wie viel Raum eine Menge ausfüllt,

Maß für Exponiertheit der Irregularitäten einer Menge, wenn man sie im Bereich sehr kleiner Größenordnungen betrachtet, gibt viel Information über die geometrischen Eigenschaften.

Ähnlichkeitsdimension für selbstähnliche Mengen

Bsp. Quadrat: besteht aus 9 gleichgroßen Würfeln, jeder skaliert um Faktor $1/3$

$n=9$

$s=\frac{1}{3}$

Überlegung: $\left(\frac{1}{s}\right)^D = n \quad \rightsquigarrow \left(\frac{1}{\frac{1}{3}}\right)^2 = 3^2 = 9$

$$\Updownarrow$$

$$D = \frac{\log n}{\log \frac{1}{s}} = \frac{\log n}{-\log s}$$

n: Anzahl selbstähnlicher Teile

s: Skalierungsfaktor.

Bsp: Strecke: $n=4$, $s=1/4$

$$\Rightarrow D = \frac{\log 4}{\log 4} = 1$$

Ähnlichkeitsdimension für Fraktale:

- Cantormenge C: $n=2$, $s=1/3$ $\Rightarrow D(C)=0.63$
- Cantorstaub: $n=4$ s entspricht Seitenlänge
  z.B. $s=0.4 \Rightarrow D = 1.513$
  $s=0.25 \Rightarrow D = 1$
- Sierpinski-Dreieck: $s=1/2$, $n=3$ $\Rightarrow D \approx 1.585$
- Sierpinski-Teppich: $n=8$, $s=1/3$ $\Rightarrow D \approx 1.89$
- Kochkurve: $n=4$, $s=1/3$ $\Rightarrow D \approx 1.2619$

Nachteil bei der Ähnlichkeitsdimension:

strenge Selbstähnlichkeit ist bei Fraktalen nicht immer gegeben.
(sondern beispielsweise stochastische)

Bsp: · zufällige Version der Kochkurve

· Variation der Cantormenge:
Verschiebung der resultierenden Intervalle in jedem Konstruktionsschritt nach geeigneter Zufallsvorschrift (ohne Überlappen der Intervalle)

=> keine Selbstähnlichkeit,
aber selbe fraktale Dimension.

später: Überdeckungsdimension,
Box-Counting-dimension, Hausdorff-dimension.

Weitere Beispiele von Fraktalen:

- Pythagoras-Baum:
Fraktal, welches aus Quadraten aufgebaut ist, die so angeordnet sind wie im Satz des Pythagoras.

· Peano-Kurve:
- Grenzwert einer Folge von Kurven, die schrittweise konstruiert werden können.
- dim: 2

· Drachenkurve:
kompliziertes Verfahren,
wird durch Ersetzen erzeugt
(ähnlich wie Koch-Kurve)