1 Überdeckungsdimension

1.1 Definition und Beispiele

Für eine nichtleere und beschränkte Menge $F \subset \mathbb{R}^n$ sei

$$N_\delta(F)$$

die Anzahl von δ-Gitter-Würfeln die F schneiden. Das δ-Gitter G_δ definieren wir hier als eine Zerlegung des $\mathbb{R}^n$ in Würfel entlang der Standardbasis mit Kantenlänge δ ($G_\delta = \bigcup_{l_1,\dots,l_n \in \mathbb{Z}} \{\delta(l_1 + x_1, \dots, l_n + x_n) \mid x_i \in [0,1]\}$). Wenn wir nun positive Konstanten $c, s \in \mathbb{R}$ finden, sodass für genügend klein gewähltes $\delta > 0$ gilt:

$$N_\delta(F) \backsimeq c \cdot \delta^{-s} \tag{1}$$

Dann sagen wir F hat Box-Counting-Dimension s und können (1) nach s auflösen:

$$\begin{aligned} & \log N_\delta(F) \backsimeq \log c - s \log \delta \\ \Leftrightarrow \qquad & s \backsimeq \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} + \frac{\log c}{\log \delta} \\ \Rightarrow \qquad & s = \lim_{\delta \searrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \end{aligned} \tag{2}$$

Zur Veranschaulichung betrachten wir ein einfaches

Beispiel 1.1. *Für* $I^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in [0,1]\} \subset \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$ *gilt:*

$$N_{2^{-k}}(I^n) = 1 \cdot (2^{-k})^{-n}.$$

Das könnten wir induktiv zeigen, wenn wir $N_{2^{-k}}(I^n) = 2^k \cdot N_{2^{-k}}(I^{n-1})$ beachten. Dabei zählen wir die nur von ∂I^n geschnittenen Würfel nicht mit. Später werden wir sehen, dass es tatsächlich genügt für die Bestimmung der Box-Counting-Dimension wie im obigen Beispiel eine gegen Null konvergente Folge $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $c \geq \delta_k > \delta_{k+1} \geq c\delta_k$ ($c \in (0,1)$) zu betrachten. Die Box-Counting-Dimension von I^n ist demnach n.

Für eine nichtleere beschränkte Menge $F \subset \mathbb{R}^n$ ist ein Potenzgesetz wie in (1) nicht notwendigerweise gegeben. Das motiviert zu der folgenden

Definition 1.1. *Die untere und obere Box-Counting-Dimension von* F *sind*

$$\underline{\dim}_B F = \liminf_{\delta \searrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \tag{3}$$

$$\overline{\dim}_B F = \limsup_{\delta \searrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \tag{4}$$

Gilt $\underline{\dim}_B F = \overline{\dim}_B F$*, dann nennen wir diesen Grenzwert Box-Counting-Dimension von* F *und schreiben*

$$\dim_B F = \lim_{\delta \searrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}.$$

Jetzt zeigen wir, dass wir $N_\delta(F)$ auch anders hätten definieren können. Insbesondere ist die Box-Counting-Dimension unabhängig vom Ursprung und von der Orientierung des gewählten δ-Gitters (das folgt aus $(i) \Leftrightarrow (ii)$ in Proposition 2.1).

Proposition 1.1. *Die untere und obere Box-Counting-Dimension sowie, falls existent, die Box-Dimension von* F *verändert sich nicht, wenn wir für* $N_\delta(F)$ *eine der folgenden Zahlen einsetzen:*

(i) die Anzahl der δ*-Gitter-Würfel die* F *schneiden (siehe oben),*

(ii) die kleinste Anzahl von Mengen die einen Durchmesser von höchstens δ *haben und* F *überdecken (*δ*-Überdeckung),*

(iii) die kleinste Anzahl von abgeschlossenen Bällen mit Radius δ *die* F *überdecken,*

(iv) die größte Anzahl von disjunkten Bällen mit Radius δ *und Mittelpunkt in* F*.*

Beweis. $(i) \Leftrightarrow (ii)$ Es seien $N_\delta^{(i)}(F)$ und $N_\delta^{(ii)}(F)$ die in (i) und (ii) erklärten Zahlen. Der Durchmesser eines δ-Gitter-Würfel beträgt $\delta\sqrt{n}$, also gilt

$$N_\delta^{(i)}(F) \geq N_{\delta\sqrt{n}}^{(ii)}(F).$$

Umgekehrt ist jede Menge mit Durchmesser δ in 3^n δ-Gitter-Würfeln enthalten. Wir wählen dazu einen Würfel der die Menge schneidet aus und sehen, dass die Menge in dem ausgewählten Würfel und seinen 3^n Nachbarwürfeln enthalten sein muss. Es folgt

$$N_\delta^{(i)}(F) \leq 3^n \cdot N_{\delta\sqrt{n}}^{(ii)}(F).$$

Aus diesen beiden Ungleichungen erhalten wir

$$\log(3^n \cdot N_\delta^{(ii)}(F)) \geq \log N_\delta^{(i)}(F) \geq \log N_{\delta\sqrt{n}}^{(ii)}(F)$$

und weiter nach Division durch $-\log\delta > 0$

$$\frac{\log 3^n + \log N_\delta^{(ii)}(F)}{-\log\delta} \geq \frac{\log N_\delta^{(i)}(F)}{-\log\delta} \geq \frac{\log N_{\delta\sqrt{n}}^{(ii)}(F)}{-\log(\delta\cdot\sqrt{n}) + \log\sqrt{n}}, \tag{5}$$

sodass

$$\liminf_{\delta\searrow 0}\frac{\log N_\delta^{(ii)}(F)}{-\log\delta}\geq\liminf_{\delta\searrow 0}\frac{\log N_\delta^{(i)}(F)}{-\log\delta}\geq\liminf_{\delta\searrow 0}\frac{\log N_\delta^{(ii)}(F)}{-\log\delta}.$$

Nach (3) gilt also die Gleichheit der unteren Box-Counting-Dimension für $N_\delta^{(i)}(F)$ und $N_\delta^{(ii)}(F)$. Analog erhalten wir die Gleichheit der oberen Box-Counting-Dimension wenn wir den Limes superior für $\delta\searrow 0$ in (5) betrachten.

$(ii)\Leftrightarrow(iii)$ Jede Überdeckung von F mit abgeschlossenen Bällen vom Radius δ und Mittelpunkt in F ist auch eine Überdeckung von F mit Mengen vom Durchmesser höchstens 2δ.

Andererseits erhalten wir aus jeder Überdeckung U von F mit Mengen deren Durchmesser höchsten δ beträgt eine Überdeckung U' von F mit abgeschlossenen Bällen mit Radius δ und Mittelpunkt in F: In jeder Menge in U wählen wir einen Punkt aus der auch in F liegt (ohne Einschränkung beachten wir nur Überdeckungen U für die wir immer einen solchen Punkt finden) und definieren U' als die Menge der abgeschlossenen Bälle mit Radius δ deren Mittelpunkte die ausgewählten Punkte sind.

Das heißt zusammengenommen

$$N_{2\delta}^{(ii)}(F)\leq N_\delta^{(iii)}(F)\leq N_\delta^{(ii)}(F).$$

Wie oben folgt daraus

$$\frac{\log N_{2\delta}^{(ii)}(F)}{-\log(2\delta)+\log 2}\geq\frac{\log N_\delta^{(iii)}(F)}{-\log\delta}\geq\frac{\log N_\delta^{(ii)}(F)}{-\log\delta},\tag{6}$$

und

$$\liminf_{\delta\searrow 0}\frac{\log N_\delta^{(ii)}(F)}{-\log\delta}\geq\liminf_{\delta\searrow 0}\frac{\log N_\delta^{(iii)}(F)}{-\log\delta}\geq\liminf_{\delta\searrow 0}\frac{\log N_\delta^{(ii)}(F)}{-\log\delta}.$$

Das bedeutet nach (3) wieder die Gleichheit der unteren Box-Counting-Dimension. Die Gleichheit der oberen Box-Counting-Dimension folgt wieder mit (6) aus der Betrachtung des Limes superior.

$(iii)\Leftrightarrow(iv)$ Wenn $N_\delta^{(iv)}(F)$ die größte Anzahl von disjunkten Bällen B mit Radius δ und Mittelpunkt in F ist, dann liegen alle Punkte von F innerhalb der Bälle aus B deren Radius auf 2δ verdoppelt wurde. Andernfalls könnten wir um den Punkt außerhalb der Bälle aus B mit verdoppeltem Radius einen Ball mit Radius δ legen der disjunkt zu den Bällen aus B mit Radius δ ist. Ein Widerspruch zur Maximalität von $N_\delta^{(iv)}(F)$. Deswegen gilt

$$N_{2\delta}^{(iii)}(F)\leq N_\delta^{(iv)}(F).$$

Ebenfalls gilt

$$N_\delta^{(iv)}(F)\leq N_{\frac{1}{2}\delta}^{(iii)}(F).$$

Um das einzusehen betrachten wir eine Menge B von disjunkten Bällen mit Radius δ und Mittelpunkten in F. Ist nun B' eine beliebige Menge von abgeschlossene Bällen mit Radius $\frac{1}{2}\delta$ und Mittelpunkten in F die F überdeckt, dann muss jeder Ball in B mindestens eines Ball aus B' enthalten, weil die Mittelpunkte der Bälle aus B in F liegen und B' F überdeckt. Darüber hinaus sind die Bälle aus B disjunkt, sodass die Anzahl der Mengen in B' mindestens so groß wie die Anzahl der Mengen in B ist. Damit folgt die obige Ungleichung.

Aus diesen Ungleichungen folgern wir

$$\frac{\log N_{2\delta}^{(iii)}(F)}{-\log(2\delta)+\log 2} \geq \frac{\log N_{\delta}^{(iv)}(F)}{-\log \delta} \geq \frac{\log N_{\frac{1}{2}\delta}^{(iii)}(F)}{-\log(\frac{1}{2}\delta)-\log 2}.$$

Für $\delta \searrow 0$ ergibt sich dann wieder die Gleichheit der unteren bzw. oberen Box-Counting-Dimension, wenn wir den Limes inferior bzw. superior betrachten. $\square$

Bei der Berechnung von Box-Counting-Dimensionen können wir die Familie der zu betrachtenden Nullfolgen in den Grenzwerten (3) und (4) einschränken:

Lemma 1.1. *Für eine Nullfolge $(\delta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ für die ein $c \in (0,1)$ existiert mit $c \geq \delta_k > \delta_{k+1} \geq c\delta_k > 0$, wobei $1 \leq k < \infty$, gilt*

$$\underline{\dim}_B F = \liminf_{k\to\infty} \frac{\log N_{\delta_k}(F)}{-\log \delta_k} \tag{7}$$

$$\overline{\dim}_B F = \limsup_{k\to\infty} \frac{\log N_{\delta_k}(F)}{-\log \delta_k}. \tag{8}$$

Beweis. Nach der Definition von $\underline{\dim}_B F$ und $\overline{\dim}_B F$ in (3) und (4) erhalten wir

$$\underline{\dim}_B F \leq \liminf_{k\to\infty} \frac{\log N_{\delta_k}(F)}{-\log \delta_k}$$

$$\overline{\dim}_B F \geq \limsup_{k\to\infty} \frac{\log N_{\delta_k}(F)}{-\log \delta_k}.$$

Für die Ungleichungen in der anderen Richtung benutzen wir $1 > \frac{\delta_{k+1}}{\delta_k} \geq c$ bzw. $0 > \log \frac{\delta_{k+1}}{\delta_k} \geq \log c$. Sei $\delta \in (0, \delta_2)$ gegeben, dann können wir k so wählen, dass $\delta_{k+1} \leq \delta < \delta_k$ gilt. Es folgt

$$\frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \geq \frac{\log N_{\delta_k}(F)}{-\log \delta_{k+1}} = \frac{\log N_{\delta_k}(F)}{-\log \delta_k - \log \frac{\delta_{k+1}}{\delta_k}} \geq \frac{\log N_{\delta_k}(F)}{-\log \delta_k - \log c},$$

das bedeutet nach (3)

$$\underline{dim}_B F = \liminf_{\delta \searrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \geq \liminf_{k\to\infty} \frac{\log N_{\delta_k}(F)}{-\log \delta_k}$$

und wieder mit (3) folgt

$$\frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \leq \frac{\log N_{\delta_{k+1}}(F)}{-\log \delta_k} = \frac{\log N_{\delta_{k+1}}(F)}{-\log \delta_{k+1} + \log \frac{\delta_{k+1}}{\delta_k}} \leq \frac{\log N_{\delta_{k+1}}(F)}{-\log \delta_{k+1} + \log c},$$

$$\overline{dim}_B F = \limsup_{\delta \searrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \leq \limsup_{k\to\infty} \frac{\log N_{\delta_{k+1}}(F)}{-\log \delta_{k+1}}.$$

□

Wir benutzen Lemma 1.1 jetzt zur Berechnung der Box-Counting -Dimension der klassischen Cantormenge.

Beispiel 1.2. *Sei C die klassische Cantormenge. Dann gilt* $\underline{\dim}_B C = \overline{\dim}_B C = \frac{\log 2}{\log 3}$.

Rechnung: Zunächst wählen wir die folgenden Bezeichnungen: Es sei $E_0 = [0,1]$, $E_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$ und für $k > 1$ sei E_k die Menge die entsteht, wenn wir aus allen zusammenhängendenIntervallen in E_{k-1} das mittlere Drittel entfernen. Dann gilt $C = \bigcap_{k=0}^{\infty} E_k$. Nun gelten für die Nullfolge $((\frac{1}{3})^k)_{k\in\mathbb{N}}$ die Ungleichungen $\frac{1}{3} \geq (\frac{1}{3})^k = \frac{1}{3} \cdot (\frac{1}{3})^k > 0$ und für $N_{(\frac{1}{3})^k}(C)$ definiert wie in (ii) von Proposition 1.1 erhalten wir

$$N_{(\frac{1}{3})^k}(C) = N_{(\frac{1}{3})^k}(C) = 2^k.$$

(Denn E_k besteht aus 2^k zusammenhängenden Intervallen der Länge $(\frac{1}{3})^k$ deren Randpunkte in C liegen und die paarweise einen Abstand von mindestens $(\frac{1}{3})^k$ zueinander haben. Das heißt eine $(\frac{1}{3})^k$-Überdeckung von C ist auch eine $(\frac{1}{3})^k$-Überdeckung der Randpunkte von E_k und besteht aus mindestens 2^k Mengen.)

Mit Lemma 1.1 und

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{\log N_{(\frac{1}{3})^k}(C)}{-\log(\frac{1}{3})^k} = \liminf_{k\to\infty} \frac{\log 2^k}{-\log(\frac{1}{3})^k} = \frac{\log 2}{\log 3} = \limsup_{k\to\infty} \frac{\log N_{(\frac{1}{3})^k}(C)}{-\log(\frac{1}{3})^k}$$

folgt die Behauptung.

Beispiel 1.3. *Die Box-Counting-Dimension der von-Koch-Kurve ist* $\frac{\log 4}{\log 3}$.

Beispiel 1.4. *Der Menger-Schwamm hat Box-Counting-Dimension* $\frac{\log 20}{\log 3}$.

1.2 Eigenschaften

Satz 1.1. **(a)** *Sei $F \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, nichtleer und $f : F \to \mathbb{R}^m$ eine Hölder-stetige Abbildung, das heißt es gibt ein $c > 0$ und ein $0 < \alpha \leq 1$ mit*

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^\alpha \qquad \textit{für alle } x, y \in F,$$

dann gilt

$$\underline{\dim}_B f(F) \leq \frac{1}{\alpha} \underline{\dim}_B F \quad \textit{und} \quad \overline{\dim}_B f(F) \leq \frac{1}{\alpha} \overline{\dim}_B F.$$

(b) *Sei $F \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, nichtleer und $f : F \to \mathbb{R}^m$ sei bi-Lipschitz stetig, das heißt es gibt $c, c' > 0$ mit*

$$c|x - y| \leq |f(x) - f(y)| \leq c'|x - y| \qquad \textit{für alle } x, y \in F,$$

dann gilt

$$\underline{\dim}_B f(F) = \underline{\dim}_B F \quad \textit{und} \quad \overline{\dim}_B f(F) = \overline{\dim}_B F.$$

Beweis. zu **(a)**: Sei $\{U\}$ eine δ-Überdeckung von F, dann ist auch $\{F \cap U\}$ eine δ-Überdeckung von F und $\{f(F \cap U)\}$ ist eine $c\delta^\alpha$-Überdeckung von $f(F)$, denn es gilt

$$|f(F \cap U)| \leq c|F \cap U|^\alpha \leq c|U|^\alpha \leq c\delta^\alpha.$$

Also erhalten wir $N_{c\delta^\alpha}(f(F)) \leq N_\delta(F)$ und

$$\frac{\log N_{c\delta^\alpha}(f(F))}{-\log(c\delta^\alpha) + \alpha \log c} = \frac{1}{\alpha} \frac{\log N_{c\delta^\alpha}(f(F))}{-\log \delta} \leq \frac{1}{\alpha} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}.$$

Wenn wir für $\delta \searrow 0$ den Limes inferior und superior betrachten folgt die Behauptung ($\alpha \log c$ im Nenner des linken Bruchs ist konstant, ist also wegen $\lim_{\delta \searrow 0} -\log(c\delta^\alpha) = \infty$ in der Grenzwertbetrachtung zu vernachlässigen).

zu **(b)**: Die Ungleichungen '$\leq$' folgt mit $\alpha = 1$ aus **(a)**. Für die andere Richtung betrachten wir die Umkehrabbildung f^{-1} von f (f ist als bi-Lipschitz stetige Funktion insbesondere bijektiv). Es seien $u, v \in f(F)$ und $x = f^{-1}(u), y = f^{-1}(v)$, sodass

$$c|f^{-1}(u) - f^{-1}(v)| = c|x - y| \leq |f(x) - f(y)| = |u - v|.$$

Daraus folgt mit **(a)** '$\geq$'. □

Korollar 1.1. *'Geometrische Invarianz' der Box-Counting-Dimension: Weil affine Abbildungen im $\mathbb{R}^n$ bi-Lipschitz stetig sind hat das Bild einer nichtleeren beschränkten Menge unter einer affinen Abbildung die gleiche untere und obere Box-Counting- Dimension wie jene Menge.*

Die weiteren nützlichen Eigenschaften der Box-Counting-Dimension fassen wir zusammen in dem

Satz 1.2. *Es seien $E, F \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und nichtleer, dann gilt für die Box-Counting-Dimension:*

(i) Monotonie: Aus $E \subset F$ folgt $\underline{\dim}_B E \leq \underline{\dim}_B F$ und $\overline{\dim}_B E \leq \overline{\dim}_B F$.

(ii) Beschränktheit: $0 \leq \underline{\dim}_B F \leq \overline{\dim}_B F \leq n$

(iii) 'Stabilität' der oberen Box-Counting-Dimension:
$\overline{\dim}_B(E \cup F) = \max\{\overline{\dim}_B E,\ \overline{\dim}_B F\}$

(iv) Wenn $F \subset \mathbb{R}^n$ offen ist gilt $\dim_B F = n$.

(v) Wenn F nur endlich viele Elemente hat, dann ist die Box-Counting-Dimension von F null.

(vi) Ist F eine m-dimensionale differenzierbare Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$, dann gilt $\dim_B F = m$ (das beweisen wir nur für $m = 1$ bzw. Kurven).

Beweis. zu (i): Für alle $\delta > 0$ gilt $N_\delta(E) \leq N_\delta(F)$ und das heißt

$$\frac{\log N_\delta(E)}{-\log \delta} \leq \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}.$$

Mit (3) und (4) folgt die Behauptung.

zu (ii): Die ersten beiden Ungleichungen folgen unmittelbar aus den Definitionen in (3) und (4). Wir betrachten die dritte Ungleichung: Weil F beschränkt ist finden wir einen Würfel $W \subset \mathbb{R}^n$ der F enthält und W ist das Bild von I^n unter einer affinen Abbildung f, sodass nach *(i)*, Korollar 1.1 und Beispiel 1.1 gilt

$$\overline{\dim}_B F \leq \overline{\dim}_B W = \overline{\dim}_B I^n = n.$$

zu (iii): Es gilt $N_\delta(F \cup E) \leq N_\delta(F) + N_\delta(E)$ und nach Division durch $-\log \delta$ erhalten wir

$$\frac{N_\delta(F \cup E)}{-\log \delta} \leq \frac{N_\delta(F)}{-\log \delta} + \frac{N_\delta(E)}{-\log \delta}.$$

Für $\delta \searrow 0$ ergibt das im Limes superior die Behauptung.

zu (iv): Wenn F offen ist, dann enthält F insbesondere einen genügend klein gewählten Würfel W. Das heißt

$$n \leq \underline{\dim}_B F \leq \overline{\dim}_B F \leq n$$

(die erste Ungleichung gilt wegen (i) und $\dim_B W = n$, die dritte Ungleichung haben wir in (ii) einsehen können).

zu (v): Es gelte $\#F = k$. Es gibt dann ein $\delta_0 > 0$, sodass für alle $\delta < \delta_0$ $N_\delta(F) = k$ gilt. Also folgt $0 \leq \lim_{\delta \searrow 0} \frac{N_\delta(F)}{-\log \delta} = \lim_{\delta \searrow 0} \frac{k}{-\log \delta} = 0$.

□

1.3 Probleme

Proposition 1.2. *Für den Abschluss einer nichtleeren, beschränkten Menge $F \subset \mathbb{R}^n$ gilt $\underline{\dim}_B \overline{F} = \underline{\dim}_B F$ und $\overline{\dim}_B \overline{F} = \overline{\dim}_B F$.*

Beweis. Wenn für $\delta > 0$ $M_1, \ldots, M_k$ endlich viele Mengen mit Durchmesser höchsten δ sind die F überdecken, dann können wir ohne Einschränkung davon ausgehen, dass die M_j abgeschlossen sind (der Durchmesser von $\overline{M_j}$ ist gleich dem von M_j). Das bedeutet $\bigcup_{j=1}^k M_j$ ist abgeschlossen als endliche Vereinigung abgeschlossener Mengen, sodass die $M_1, \ldots, M_k$ auch $\overline{F}$ überdecken. Also gilt $N_\delta(F) = N_\delta(\overline{F})$ und die Behauptung folgt aus der Definition der unteren und oberen Box-Counting-Dimension. □

Eine Konsequenz daraus ist die Existenz abzählbarer Mengen deren Box-Counting-Dimension größer als 0 ist. So gilt

$$\dim_B(\mathbb{Q}) = \dim_B(\overline{\mathbb{Q}}) = \dim_B(\mathbb{R}) = 1.$$

Insbesondere gilt im allgemeinen nicht $\dim_B \bigcup_{i=1}^\infty F_i = sup_i\{\dim_B F_i\}$. Um diesen Makel zu beheben reicht es allerdings nicht nur noch die Box-Counting-Dimension von abgeschlossenen Mengen zu betrachten. Das zeigt das folgende Beispiel einer abgeschlossenen Menge mit nur einem Häufungs- punkt und Box-Counting-Dimension größer als 0.

Beispiel 1.5. $F = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\}$ *hat Box-Counting-Dimension* $\frac{1}{2} > 0$. *Rechnung: siehe Beispiel 2.7, Kapitel 2, Falconer: Fractal Geometry.*