Differentialgeometrie II
WWU Münster, Wintersemester 2015/16
Prof. Dr. Joachim Lohkamp / Matthias Kemper
Abgabe bis zum **27.01.2015**

WESTFÄLISCHE
WILHELMS-UNIVERSITÄT
MÜNSTER

Blatt 8

Aufgabe 1: Dreieck im hyperbolischen Raum

Berechnen Sie die Höhe eines rechtwinkligen Dreiecks im hyperbolischen Raum, bei dem zwei Eckpunkte auf dem Rand liegen.

Aufgabe 2: Hessesche

(M, g) sei eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Die *Hessesche* einer Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$\operatorname{Hess}_x f(u, v) = g(\nabla_u \operatorname{grad} f, v) \quad \text{für } x \in M \text{ und } u, v \in T_x M \ .$$

(a) Zeigen Sie, dass $\operatorname{Hess} f$ ein symmetrischer 2-Tensor ist.

(b) Wegen der Symmetrie ist Hess_x schon durch die zugehörige quadratische Form bestimmt. Zeigen Sie

$$\operatorname{Hess}_x(v, v) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} g(\operatorname{grad}_{\gamma(t)} f, \dot\gamma(t))$$

für eine Geodäte mit $\gamma(0) = x$ und $\dot\gamma(0) = v$.

Aufgabe 3: Busemann-Funktion und Horosphären

Im $\mathbb{H}^n$ ist die *Busemann-Funktion* gegeben durch

$$B_e(x, b) = \lim_{t \to \infty} [d(\beta(t), x) - t]$$

für $e, x \in \mathbb{H}^n$, $b \in \partial\mathbb{H}^n$ und einen nach Bogenlänge parametrisierten geodätischen Strahl $\beta : e \rightsquigarrow b$. Zeigen Sie, dass die Levelflächen $B_e(\cdot, b)^{-1}(c)$ der Busemann-Funktion *Horosphären* sind (d. h. im Poincaré-Modell euklidische Sphären, die den Rand berühren).