Differentialgeometrie II
WWU Münster, Wintersemester 2015/16
Prof. Dr. Joachim Lohkamp / Matthias Kemper
Abgabe bis zum **20.01.2015**

Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Blatt 7

Aufgabe 1: Hyperbolische Mannigfaltigkeiten

Rufen Sie sich wenn notwendig die Klassifikation einfach zusammenhängender Raumformen (vollständige zusammenhängende Mannigfaltigkeiten mit konstanter Schnittkrümmung) und etwas Überlagerungstheorie in Erinnerung und machen Sie damit folgende Aussage plausibel:

> Zu einer vollständigen zusammenhängenden hyperbolischen Mannigfaltigkeit M^n gibt es eine freie, eigentlich diskontinuierliche Wirkung von $\pi_1(M)$ auf $\mathbb{H}^n$, sodass M isometrisch diffeomorph zu $\mathbb{H}^n/\pi_1(M)$ ist.

Aufgabe 2: Mannigfaltigkeiten als CW-Komplexe

Wie findet man auf einer zusammenhängenden kompakten Mannigfaltigkeit eine CW-Struktur, die nur eine 0-Zelle enthält?
Tipp: Morsetheorie

Aufgabe 3: Abbildungen zwischen asphärischen CW-Komplexen

Seien $M_1 = \mathbb{H}_1/\Gamma_1$, $M_2 = \mathbb{H}_2/\Gamma_2$ zwei kompakte orientierbare hyperbolische Mannigfaltigkeiten der Dimension $n \geq 3$ und $\varphi : \Gamma_1 \to \Gamma_2$ ein Isomorphismus. Wir wollen nun die in der Vorlesung verwendete stetige Abbildung $\tilde{f} : \mathbb{H}^n \to \mathbb{H}^n$ konstruieren, die φ-äquivariant ist, d. h.

$$\tilde{f} \circ \gamma = \varphi(\gamma) \circ \tilde{f} \quad \forall \gamma \in \Gamma_1$$

erfüllt. Das funktioniert mittels Induktion über eine geeignete CW-Struktur.

(a) Wir fixieren ein $v \in \mathbb{H}^n$ und betrachten die Bilder unter den Quotientenprojektionen p_i als Basispunkte für die Fundamentalgruppe. Mit Aufgabe 2 erhalten wir eine CW-Struktur auf M_i mit $p_i(v)$ als einziger 0-Zelle. Warum lassen sich diese CW-Strukturen zu zwei CW-Strukturen auf $\mathbb{H}^n$ zurückziehen?
Im Folgenden bezeichnen wir $\mathbb{H}^n$ mit der von M_i induzierten CW-Struktur als $\mathbb{H}^n_i$.

(b) Wie muss $\tilde{f}$ auf dem 0-Skelett $\Gamma_1(v)$ von $\mathbb{H}^n_1$ definiert werden?

(c) Definieren Sie nun induktiv $\tilde{f}$ auf k-Zellen, indem Sie die Möglichkeit nutzen, auf $\mathbb{H}^n_2$ (und D^k) Konvexkombinationen von zwei Punkten bilden zu können (da je zwei Punkte mit einer eindeutigen Geodäte verbunden werden können). Zudem kann man bei Vorgabe eines $p_0 \in S^{k-1}$ jeden Punkt im Inneren von D^k eindeutig als Konvexkombination von p_0 und einem weiteren Punkt in S^{k-1} schreiben.

(d) Zeigen Sie, dass diese Konstruktion wirklich eine Homotopieäquivalenz f zwischen M_1 und M_2 induziert. Das Homotopieinverse erhält man dabei, indem man die Konstruktion auf φ^{-1} anwendet.

Wenn Sie wollen, können Sie statt (a)–(c) auch folgende allgemeinere Aussage zeigen:

(a*) Sind X und Y zwei endliche asphärische CW-Komplexe (d. h. alle Homotopiegruppen außer der Fundamentalgruppe sind 0), dann wird jeder Homomorphismus $\varphi : \pi_1(X) \to \pi_1(Y)$ von einer stetigen Abbildung $f : X \to Y$ induziert.