Blatt 6

Aufgabe 1: Liegruppen und Liealgebren

Eine *Liegruppe* G ist eine Mannigfaltigkeit und gleichzeitig eine Gruppe mit differenzierbaren Gruppenoperationen. Mit $e \in G$ bezeichnen wir das neutrale Element und mit $L_g : G \to G$ die Linksmultiplikation mit $g \in G$.
Die *Liealgebra* $\mathfrak{g}$ einer Liegruppe G ist definiert als die Menge aller *linksinvarianten* Vektorfelder X, d. h. $(L_g)_* X = X$. Mit dem Kommutator von Vektorfeldern als Lieklammer ist dies eine Liealgebra im abstrakten Sinne (Vektorraum mit schiefsymmetrischer Bilinearform, die die Jacobi-Identität erfüllt).

(a) Zeigen Sie, dass die Liealgebra über die Abbildung $\mathfrak{g} \to T_eG : X \mapsto X|_e$ kanonisch mit dem Tangentialraum am Einselement identifiziert werden kann. Insbesondere hat $\mathfrak{g}$ als Vektorraum also die gleiche Dimension wie G als Mannigfaltigkeit.

(b) Wichtige Beispiele für Liegruppen sind Matrizengruppen wie $O(n)$, $SO(n)$, $O(r,s)$, $U(n)$, $SU(n)$, $SL(n,\mathbb{K})$, ..., also Untergruppen von $GL(n,\mathbb{K})$. Zeigen Sie, dass die Lieklammer in diesem Fall mit dem Kommutator von Matrizen übereinstimmt.

(c) Das Differential der Konjugationsabbildung $c_g : G \to G : h \mapsto ghg^{-1}$ am neutralen Element ist die *adjungierte Darstellung* $\mathrm{Ad}_g := D_e c_g \in GL(\mathfrak{g})$. Ad ist tatsächlich eine Darstellung, d. h. ein Gruppenhomomorphismus $\mathrm{Ad} : G \to GL(\mathfrak{g})$. Die *adjungierte Darstellung der Liealgebra* ist gegeben als deren Differential am neutralen Element, $\mathrm{ad} := D_e \,\mathrm{Ad} : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(\mathfrak{g})$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{ad}_v(w) = [v,w]$ die Lieklammer für $v, w \in \mathfrak{g}$ ist.

Aufgabe 2: Homogene Räume

Ein *homogener Raum* ist eine Mannigfaltigkeit M, auf die eine Liegruppe $G \subset \mathrm{Diff}(M)$ transitiv wirkt. Wenn M eine Riemannsche Metrik trägt, fordert man in der Regel zusätzlich, dass G eine Lieuntergruppe der Isometriegruppe von M ist.

(a) Sei $G_x := \{g \in G \mid gx = x\}$ der *Stabilisator* von $x \in M$. Finden Sie eine Bijektion f zwischen M und der Menge G/G_x der Linksnebenklassen von G_x, die G-äquivariant ist in dem Sinne, dass $f(gy) = gf(y)$ für alle $g \in G$. Was ändert sich bei der Wahl eines anderen Basispunktes $x' \in M$?

Umgekehrt lässt sich jeder Quotient aus einer Liegruppe und einer abgeschlossenen Untergruppe mit einer eindeutigen differenzierbaren Struktur versehen.

(b) Überlegen Sie sich, wie man $\mathbb{R}^n$, S^n und $\mathbb{H}^n$ als homogene Räume darstellen kann. Für $\mathbb{H}^n$ verwenden Sie dazu am besten das Hyperboloidmodell im Minkowskiraum.

(c) Für eine Riemannsche Mannigfaltigkeit M induziert jedes Element eines Punktstabilisators $\mathrm{Isom}(M)_x$ der Isometriegruppe über sein Differential eine lineare Isometrie von T_xM. M heißt *isotrop*, wenn so jedes Element von $O(T_xM)$ getroffen wird, also $\mathrm{Isom}(M)_x$ transitiv auf den Orthonormalbasen von T_xM operiert, für alle $x \in M$.

Finden Sie ein Beispiel für eine homogene, aber nicht isotrope Riemannsche Mannigfaltigkeit.

(d) Zeigen Sie, dass jede zusammenhängende vollständige isotrope Riemannsche Mannigfaltigkeit homogen ist (in dem Sinne, dass $\mathrm{Isom}(M)$ transitiv wirkt).
Tipp: Isometrien bilden Geodäten auf Geodäten ab.