Blatt 5

Aufgabe 1: Schnittkrümmung

Zur Erinnerung: Die *Schnittkrümmung* einer Riemannschen Mannigfaltigkeit ist definiert als

$$K \in \Gamma(G_2(M)) \quad \text{mit} \quad K(\langle u, v\rangle) = \frac{g(R(u,v)v,u)}{g(u,u)g(v,v) - g(u,v)^2} \ ,$$

wobei $G_2(M)$ das Graßmannbündel der zweidimensionalen Unterräume des Tangentialraums in jedem Punkt ist. Dabei benutzen wir für den Krümmungstensor die Konvention

$$R(X,Y) = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]} \ .$$

(a) Vergewissern Sie sich, dass die Definition nicht von der Wahl der Vektoren abhängt, die einen Unterraum aufspannen.

(b) Wie hängen in zwei Dimensionen Schnittkrümmung (dann auch *Gaußkrümmung* genannt), Skalarkrümmung und Riccikrümmung zusammen?

(c) Berechnen Sie die Schnittkrümmung der Poincaré-Scheibe $B_1(0) \subset \mathbb{C}$ mit Metrik

$$\left(\frac{a}{1-|z|^2}\right)^2 g_{\text{eukl}} \ .$$

Wenn Sie dafür die Krümmung einer beliebig konform deformierten Metrik $f^2 g_{\text{eukl}}$ berechnen möchten, setzen Sie an geeigneter Stelle Koordinatenvektorfelder ein, um die Rechnung deutlich zu vereinfachen.
In Zukunft wählen wir die Konstante a so, dass sich die Schnittkrümmung -1 ergibt.

Aufgabe 2: Zweidimensionale hyperbolische Geometrie

(a) Beweisen Sie die Formel $K = -f''/f$ für die Schnittkrümmung von Rotationsflächen $(I \times S^1, g_{\text{eukl}} + f^2 g_{S^1})$.

(b) Berechnen Sie Krümmung und Flächeninhalt eines Cusps (Rotationsfläche mit $I = \mathbb{R}^+$, $f(t) = \mathrm{e}^{-t}$).

(c) Überlegen Sie sich ganz allgemein, warum es eine eindeutige Möglichkeit gibt, zwei Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit einer Isometrie der total geodätischen Ränder zu verkleben.

(d) Finden Sie durch Verdoppeln und Verkleben von rechtwinkligen geodätischen Sechsecken im Poincaré-Scheibenmodell eine Möglichkeit, eine Hose (“pair of pants”) mit beliebigen vorgegebenen Randlängen zu konstruieren. Was ist der Flächeninhalt einer solchen Hose?

Aufgabe 3: Ein uniformer Raum in quasihyperbolischer Metrik ist δ-hyperbolisch

Ziel dieser Aufgabe ist der letzte Schritt im Beweis obiger Aussage. Dazu wird mehrfach die in der Vorlesung bewiesene Tatsache benutzt, dass die quasihyperbolischen Geodäten in (X, k_X) in der Ausgangsmetrik (X, d_X) betrachtet $\bar{c}$-uniforme Kurven sind. Eine quasihyperbolische Geodäte zwischen zwei Punkten x, y bezeichnen wir mit $\gamma_{x,y}$.
Wir nehmen also ein beliebiges quasihyperbolisches Dreieck x, y, z mit Seiten $\gamma_{x,y}, \gamma_{y,z}, \gamma_{x,z}$. Zu zeigen ist nun $k_X(u, \gamma_{x,z} \cup \gamma_{y,z}) \leq \delta$ für alle $u \in \gamma_{x,y}$. Wir können $\ell(\gamma_{u,x}) := \ell_{d_X}(\gamma_{u,x}) \leq \ell(\gamma_{u,y})$ annehmen.

(a) Wählen Sie im Fall $\ell(\gamma_{x,z}) < \frac{1}{\bar{c}}\ell(\gamma_{x,u})$ einen Punkt $v \in \gamma_{y,z}$ mit $\ell(\gamma_{z,v}) = \frac{1}{2\bar{c}}\ell(\gamma_{x,u})$ und zeigen Sie, dass dieser

$$d_X(u, v) \leq \frac{2\bar{c} + 3}{2\bar{c}}\ell(\gamma_{x,u}) \quad \text{und} \quad d_X(v, \partial X) \geq \frac{1}{2\bar{c}^2}\ell(\gamma_{x,u}) \tag{$\star$}$$

erfüllt.

(b) Finden Sie im Fall $\ell(\gamma_{x,z}) \geq \frac{1}{\bar{c}}\ell(\gamma_{x,u})$ einen Punkt $v \in \gamma_{x,z}$, für den die Ungleichungen in $(\star)$ gelten.

(c) Fügen Sie $(\star)$ und die in der Vorlesung bewiesene Abschätzung

$$k_X(x, y) \leq 4c^2 \log\left(1 + \frac{d_X(x, y)}{\max\{d_X(x, \partial X), d_X(y, \partial X)\}}\right)$$

zusammen, um $k_X(u, v) \leq \delta$ für ein $\delta(c, \bar{c}(c)) > 0$ zu zeigen.