Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Blatt 4

Aufgabe 1: Gromov-Hyperbolizität

(a) Sei (X,d) ein geodätischer metrischer Raum. Das Gromov-Produkt ist definiert als $(x,y)_z = \frac{1}{2}\left(d(x,z)+d(y,z)-d(x,y)\right)$. Beweisen Sie: X ist δ-hyperbolisch genau dann, wenn es ein $\delta' > 0$ gibt, sodass

$$(x,z)_p \geq \min\{(x,y)_p,(y,z)_p\} - \delta' \qquad \text{für alle } x,y,z,p \in X\ .$$

(b) Finden Sie eine obere Schranke für die Fläche von Kreisscheiben, die im Inneren geodätischer Dreiecke in der hyperbolischen Ebene $\mathbb{H}^2$ liegen.

(c) Folgern Sie daraus die Gromov-Hyperbolizität des hyperbolischen Raums $\mathbb{H}^n$.

Wichtige Beispiele für uniforme Räume sind uniforme Gebiete*, d. h. wir betrachten zusammenhängende offene Teilmengen D des $\mathbb{R}^n$ mit der intrinsischen Metrik, gegeben als*

$$d(x,y) = \inf\{\ell(\gamma)\mid \gamma \text{ verbindet } x \text{ und } y \text{ und liegt ganz in } D\}\ .$$

Aufgabe 2: Uniformität ist eine lokale Eigenschaft des Randes

Zeigen Sie, dass Uniformität eines beschränkten Gebiets D eine lokale Eigenschaft des Randes ist, genauer: Seien $r > 0$ und $c \geq 1$ fest und $D \cap B_r(z)$ c-uniform für alle $z \in \partial D \subset \bar{D}$. Dann ist D $42c^4 \operatorname{diam}(D)/r$-uniform. ($\operatorname{diam}(D)$ bezeichnet den Durchmesser von D.)
Überlegen Sie sich dazu zunächst, warum man $\operatorname{diam}(D) = 1$ annehmen kann und dass man zwei Punkte $x,y \in D$ mit $d(x,y) \leq r/2$ mit einer c-uniformen Kurve verbinden kann.

Aufgabe 3: Uniforme Gebiete

Zeigen Sie:

(a) Das Innere der Kochschen Schneeflocke ist ein uniformes Gebiet.

(b) Der Halbraum $\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n \mid x_1 > 0\}$ ist ein uniformes Gebiet.

(c) Uniformität wird unter Bilipschitzabbildungen erhalten.

(d) Jedes beschränkte Gebiet mit Lipschitzregulärem Rand ist uniform.