Differentialgeometrie II
WWU Münster, Wintersemester 2015/16
Prof. Dr. Joachim Lohkamp / Matthias Kemper
Abgabe bis zum **18.11.2015**

Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Blatt 3

Aufgabe 1: Berechnung von Residuen

(a) Zeigen Sie: Hat ein f an der Stelle z_0 einen Pol k-ter Ordnung, so ist

$$\operatorname{Res}_{z_0} f = \frac{1}{(k-1)!} \left.\frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}z^{k-1}}\right|_{z_0} (z-z_0)^k f(z) \ .$$

(b) Folgern Sie: Sind f und g holomorph und hat g eine einfache Nullstelle bei z_0, dann gilt

$$\operatorname{Res}_{z_0} \frac{f}{g} = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)} \ .$$

(c) Beweisen Sie: Ist R eine rationale Funktion zweier Variablen, sodass $R(\cos\varphi, \sin\varphi)$ für alle $\varphi \in [0, 2\pi]$ definiert ist, dann ist

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\varphi, \sin\varphi)\mathrm{d}\varphi = 2\pi\mathrm{i} \sum_{z_0<1} \operatorname{Res}_{z_0} \frac{1}{\mathrm{i}z} R\left(\frac{1}{2}(z+1/z), \frac{1}{2\mathrm{i}}(z-1/z)\right) \ .$$

(d) Berechnen Sie:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x \ , \qquad \operatorname{Res}_{\frac{\pi}{2}} \tan \ , \qquad \int_0^{2\pi} \frac{\sin\varphi(\cos\varphi + 2\sin^2\varphi)}{3\cos^2 - \sin^2\varphi + 4}\mathrm{d}\varphi \ .$$

Aufgabe 2: Satz von Rouché

(a) Sei f meromorph in einem Gebiet G, $A \subset G$ und ∂A ein Zykel, der keine Nullstelle und keinen Pol von f trifft. Überlegen Sie sich, dass dann

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\partial A} \frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z$$

die Differenz aus Null- und Polstellen von f in A, jeweils mit Vielfachheit bzw. Ordnung gezählt, angibt (*Null- und Polstellen zählendes Integral*).

(b) Für eine stetig differenzierbare Randkurve $\gamma = \partial A$ wird daraus

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{f\circ\gamma} \frac{\mathrm{d}z}{z} = \text{Umlaufzahl von } f\circ\gamma \text{ um } 0 \ .$$

Warum stimmt das auch für stetige Wege?

(c) Folgern Sie daraus den *Satz von Rouché*: Sind in obiger Situation f und g holomorph auf G mit $|g| < |f|$ auf ∂A, dann haben f und $f+g$ gleich viele Nullstellen in A.

Aufgabe 3: Hyperbolische Ebene

(a) In Aufgabe 3(c) auf Blatt 2 wurde die konforme Automorphismengruppe der Einheitskreisscheibe $B_1(0) \subset \mathbb{C}$ durch Abbildungen der Form

$$z \mapsto \lambda \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z} \quad \text{mit } |\lambda| = 1 \text{ und } z_0 \in B_1(0)$$

charakterisiert. Finden Sie die bis auf globale Skalierung eindeutige Riemannsche Metrik g auf $B_1(0)$, für die diese Abbildungen Isometrien sind, d. h. $f^* g = g$.
Tipp: Beginnen Sie mit $z_0 = 0$ und am Nullpunkt.

(b) Die so erhaltene (und geeignet normierte) hyperbolische Metrik kann man nun auf zur Einheitskreisscheibe biholomorph äquivalente Gebiete (nach dem Riemannschen Abbildungssatz also *alle* einfach zusammenhängenden Gebiete $\neq \mathbb{C}$) zurückziehen. Warum ist die so gewonnene Metrik unabhängig von der Wahl der biholomorphen Abbildung?

(c) Zeichnen Sie einige Geodäten für die hyperbolische Metrik auf der Kreisscheibe und auf der rechten Halbebene.