Blatt 2

Aufgabe 1: Analytische Fortsetzung

(a) $G \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ sei ein einfach zusammenhängendes Gebiet. Zeigen Sie, dass es eine holomorphe Funktion $\ell : G \to \mathbb{C}$ mit $\exp \circ \ell = \mathrm{id}_G$ gibt und dass $\ell + 2\pi \mathrm{i}\mathbb{Z}$ bereits die Menge aller Funktionen mit diesen Eigenschaften ist.

(b) Konstruieren Sie aus ℓ eine holomorphe k-te Wurzel für positive ganze k, also eine Funktion $\sqrt[k]{\cdot}$ mit $\left(\sqrt[k]{z}\right)^k = z$. Wie sieht die Menge aller Funktionen mit dieser Eigenschaft aus?

Aufgabe 2: Konforme Abbildungen

Eine differenzierbare Abbildung zwischen Riemannschen Mannigfaltigkeiten nennen wir *konform*, wenn sie winkelerhaltend ist, d. h. die Bilder zweier Kurven unter dieser Abbildung sich im selben Winkel wie die Ausgangskurven schneiden. Zeigen Sie, dass die konformen Abbildungen zwischen Gebieten in $\mathbb{C}$ genau die holomorphen und antiholomorphen (d. h. $\bar{f}$ holomorph oder, äquivalent dazu, $\partial f = 0$) Abbildungen mit nirgends verschwindendem Differential sind. Untersuchen sie dazu, wie das Differential einer konformen Abbildung aussehen muss.
Vorsicht: Was »konform« genannt wird, variiert in der Literatur sehr stark, manchmal fordert man auch noch Invertierbarkeit oder Orientierungserhaltung.

Aufgabe 3: Biholomorphe Äquivalenz

Biholomorphe Abbildungen (holomorphe Abbildungen mit holomorphem Inversem) sind die orientierungserhaltenden konformen Isomorphismen. Existiert eine biholomorphe Abbildung zwischen zwei Gebieten, nennt man diese *biholomorph äquivalent* (oder auch konform äquivalent).

(a) Finden Sie eine biholomorphe Abbildung der Einheitskreisscheibe in $\mathbb{C}$ auf die rechte Halbebene $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$.

(b) Zeigen Sie, dass die Einheitskreisscheibe nicht biholomorph äquivalent zu ganz $\mathbb{C}$ ist.

(c) Bestimmen Sie die Automorphismengruppe der Einheitskreisscheibe (d. h. die Menge aller biholomorphen Abbildungen der Einheitskreisscheibe auf sich selbst). Sie können dafür (a) und das Schwarzsche Lemma benutzen.