Differentialgeometrie II
WWU Münster, Wintersemester 2015/16
Prof. Dr. Joachim Lohkamp / Matthias Kemper
Abgabe bis zum **4.11.2015**

Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Blatt 1

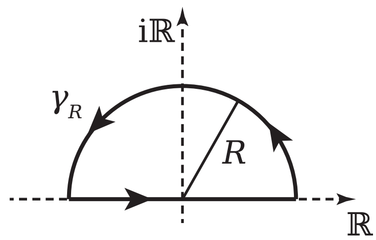
Aufgabe 1: Integration

(a) Zeigen Sie, dass $1/z$ in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ keine Stammfunktion besitzt.

(b) Berechnen Sie folgende Integrale:

(i) $\displaystyle\int_{\partial B_{\pi/2}(2\mathrm{i})} \frac{z^2 \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})z}}{z^2 - 2z + 2} \mathrm{d}z$

(ii) $\displaystyle\int_{\gamma_R} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z^2+1} \mathrm{d}z$ mit nebenstehendem γ_R für $R > 1$



(iii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+1} \mathrm{d}x$

(iv) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{z - \mathrm{i}} \mathrm{d}z$

Aufgabe 2: Wirtinger-Kalkül

Auf einer offenen Teilmenge U von $\mathbb{C}$ seien $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ die Differentiale der Koordinatenfunktionen $x + \mathrm{i}y \mapsto x$ bzw. $x + \mathrm{i}y \mapsto y$. Wir definieren die komplexwertigen Differentialformen

$$\mathrm{d}z = \mathrm{d}x + \mathrm{i}\,\mathrm{d}y \quad \text{und} \quad \mathrm{d}\bar{z} = \mathrm{d}x - \mathrm{i}\,\mathrm{d}y\ .$$

Dies sind tatsächlich die Differentiale der Funktionen $z \mapsto z$ und $z \mapsto \bar{z}$. $\mathrm{d}z$ und $\mathrm{d}\bar{z}$ bilden eine Basis des Raums der komplexwertigen Differentialformen, sodass wir die *Wirtinger-Ableitungen* $\frac{\partial}{\partial z}$ und $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ über die Forderung

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y = \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\mathrm{d}\bar{z}$$

an das (reelle) Differential komplexwertiger C^1-Funktionen f definieren können.
Kurz schreibt man auch $\partial = \frac{\partial}{\partial z}$ bzw. $\bar{\partial} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$.

(a) Drücken Sie die Wirtingerableitungen durch die gewöhnlichen partiellen Ableitungen aus.

(b) Finden Sie Produkt- und Kettenregeln für die Wirtingerableitungen sowie Regeln zum Differenzieren von Polynomen in z und $\bar{z}$.

(c) Wie lassen sich die Bedingung für komplexe Differenzierbarkeit und die komplexe Ableitung mit den Wirtingerableitungen ausdrücken, wie sieht das (reelle) Differential einer holomorphen Funktion aus? $\bar{\partial}$ heißt auch *Cauchy-Riemann-Operator*.

(d) Folgern Sie eine Version des Cauchyschen Integralsatzes aus dem Satz von Stokes.

Aufgabe 3: Maximumsprinzip

Sei G ein Gebiet in $\mathbb{C}$ und $\varnothing \neq U \Subset G$ (d. h. U offen und relativ kompakt). Zeigen Sie: Jede nichtkonstante holomorphe Funktion auf G, deren Betrag auf dem Rand ∂U konstant ist, hat eine Nullstelle in U.