Prof. Dr. Joachim Lohkamp
Matthias Kemper WWU Münster
WS17/18

Differentialgeometrie I

Blatt 9

Abgabe am **20.12.2017**

Aufgabe 1: Krümmung von Hyperflächen

Für eine Hyperfläche $H^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ kann man (lokal) ein Normalenvektorfeld ν wählen und die zweite Fundamentalform A lässt sich als selbstadjungierte Bündelabbildung $L : TH \to TH$ auffassen via $A(X, Y) = g(X, LY)\nu$ (*Formoperator* oder *Weingartenabbildung* genannt). Der Spektralsatz der linearen Algebra besagt nun, dass L punktweise diagonal bezüglich einer orthonormalen Eigenbasis ist. Die Eigenwerte nennt man *Hauptkrümmungen*.

(a) Für nach Bogenlänge parametrisierte Kurven γ im $\mathbb{R}^n$ definiert man die Krümmung als $\ddot{\gamma}$. Zeigen Sie, dass der Normalanteil der Krümmung einer Kurve in H gleich $A(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})$ ist.

(b) Zeigen Sie mit der Gaußformel (Aufgabe 1(c) von Blatt 8), dass die Schnittkrümmung der von normierten Eigenvektoren e_i, e_j aufgespannten Ebene genau das Produkt der zugehörigen Hauptkrümmungen λ_i, λ_j ist. Damit haben Sie ganz nebenbei Gauß' *theorema egregium* für Flächen im $\mathbb{R}^3$ abgehandelt, welches besagt, dass das Produkt der Hauptkrümmungen (*Gaußkrümmung*) nur von der inneren Geometrie der Fläche abhängt.

Aufgabe 2: Positive Krümmung auf Hyperflächen

Zeigen Sie:

(a) Jede geschlossene (= kompakte und unberandete) Hyperfläche im $\mathbb{R}^n$ besitzt einen Punkt, an dem alle Schnittkrümmungen nichtnegativ sind.

(b) Jede geschlossene Hyperfläche mit Durchmesser höchstens d (gemessen in euklidischer Metrik) besitzt einen Punkt, an dem alle Schnittkrümmungen $\geq (2/d)^2$ sind.

Tipp: Veranschaulichen Sie sich die Situation im $\mathbb{R}^3$. Mit Aufgabe 1 kann man beide Probleme auf Aussagen über Kurven im $\mathbb{R}^2$ zurückführen. Kurven, die Graph einer Funktion sind, d. h. $\gamma(x) = (x, f(x))$, haben übrigens Krümmung $f''(x)/(1 + f'(x)^2)^{3/2}$.

Aufgabe 3: Lieableitung für Differentialformen

(a) Das *innere Produkt* eines Vektors X mit der $(p + 1)$-Form ω ist die p-Form $\iota_X\omega$ gegeben durch $\iota_X\omega(Y_1, \dots, Y_p) = \omega(X, Y_1, \dots, Y_p)$. Zeigen Sie

$$\iota_X(\omega \wedge \eta) = (\iota_X\omega) \wedge \eta + (-1)^p\omega \wedge \iota_X\eta \quad \text{für } \omega \in \Omega^p(M),\ \eta \in \Omega^q(M)\ .$$

(b) Zeigen Sie, dass sich die Lieableitung auf Differentialformen als $L_X = \mathrm{d}\iota_X + \iota_X\mathrm{d}$ schreiben lässt, indem Sie die Formel auf 0-Formen und 1-Formen überprüfen und die Produktregel $L_X(\omega \wedge \eta) = (L_X\omega) \wedge \eta + \omega \wedge L_X\eta$ für die rechte Seite bestätigen.

(c) Auf einer Riemannschen Metrik (M, g) kann man die Divergenz $\mathrm{div}^g(X)$ eines Vektorfeldes X durch die Forderung $\mathrm{div}^g(X)\,\mathrm{vol}^g = L_X\,\mathrm{vol}^g$ definieren. Warum ist das selbst für nichtorientierbare Mannigfaltigkeiten wohldefiniert? Was erhält man im euklidschen $\mathbb{R}^n$?