Prof. Dr. Joachim Lohkamp
Matthias Kemper

WWU Münster
WS17/18

# Differentialgeometrie I

*Blatt 8*

Abgabe am **13.12.2017**

---

### Aufgabe 1: Zweite Fundamentalform

Die zweite* Fundamentalform einer Untermannigfaltigkeit $S$ einer Riemannschen Mannigfaltigkeit $(M, g)$ ist definiert als

$$A(X,Y) = (\nabla^g_X Y)^\perp \quad \text{für } X, Y \in \Gamma(TS),$$

wobei $^\perp$ den Anteil senkrecht zu $TS \subset TM$ bezeichnet.

(a) Zeigen Sie $A(X,Y) = A(Y,X)$ für Vektorfelder tangential an $S$.

(b) Folgern Sie, dass $A$ ein $(0,2)$-Tensor auf $S$ mit Werten im Normalenbündel $NS$ (d. h. ein Schnitt in $T^*S \otimes T^*S \otimes NS$) ist.

(c) Beweisen Sie die *Gaußformel*:

$$\langle R^M(X,Y)V, W\rangle = \langle R^S(X,Y)V, W\rangle + \langle A(X,V), A(Y,W)\rangle - \langle A(X,W), A(Y,V)\rangle$$

für Vektoren tangential an $S$.

### Aufgabe 2: Sturmscher Vergleichssatz

Beweisen Sie den *Sturmschen Vergleichssatz*:
Seien $x_1, x_2 : [0,T] \to \mathbb{R}$ Lösungen der Differentialgleichungen

$$x_i''(t) + p_i(t)x_i(t) = 0$$

mit Anfangsbedingungen $x_i(0) = 0$ und $x_1'(0) = x_2'(0) > 0$ für stetige Funktionen $p_1, p_2 : [0,T] \to \mathbb{R}$. Wenn $p_1(t) \leq p_2(t)$ auf $[0,T]$ und $x_2(t) > 0$ auf $(0,T]$, dann gilt $x_1(t) \geq x_2(t)$ auf $[0,T]$.

### Aufgabe 3: Rauchscher Vergleichssatz

Lesen Sie einen Beweis des Rauchschen Vergleichssatzes (z. B. in Cheeger, Ebin: *Comparison Theorems in Riemannian Geometry*, S. 32–34) und nennen Sie die zentralen Beweisideen in wenigen Stichpunkten. Achten Sie auf Analogien zum Sturmschen Vergleichssatz.

---

*»Erste Fundamentalform« ist ein klassischer Name für die induzierte Riemannsche Metrik auf einer Fläche im $\mathbb{R}^3$.