Prof. Dr. Joachim Lohkamp
Matthias Kemper

WWU Münster
WS17/18

Differentialgeometrie I

Blatt 7

Abgabe am **6.12.2017**

Aufgabe 1: Geodäten in Überlagerungen

Zur Erinnerung: Eine Überlagerung von Mannigfaltigkeiten ist eine surjektive differenzierbare Abbildung $p : N \to M$, sodass jeder Punkt in M eine offene Umgebung U besitzt, für die $p^{-1}(U)$ eine disjunkte Vereinigung von offenen Teilmengen ist, auf denen p ein Diffeomorphismus ist. Wir nennen p eine *Riemannsche Überlagerung*, falls M mit einer Riemannschen Metrik g und N mit der Pullbackmetrik p^*g ausgestattet ist.

Zeigen Sie: Die Geodäten von M sind gerade die Projektionen der Geodäten von N und umgekehrt sind die Geodäten von N genau die angehobenen Geodäten von M.

Aufgabe 2: Überlagerung mit endlichem Durchmesser

(a) Zeigen Sie: Eine zusammenhängende vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit ist genau dann kompakt, wenn sie endlichen Durchmesser hat.

(b) Rufen Sie sich die zentralen Aussagen der Überlagerungstheorie in Erinnerung und begründen Sie folgende Aussage:

Ist die universelle Überlagerung $\tilde{M}$ einer Riemannschen Mannigfaltigkeit M kompakt, so ist die Fundamentalgruppe von M endlich.

Aufgabe 3: Schnittkrümmung

Die *Schnittkrümmung* einer Ebene $E \subset T_pM$ ist definiert als

$$K(E) = \frac{g(R(u,v)v,u)}{g(u,u)g(v,v) - g(u,v)^2}$$

mit Vektoren $u, v \in T_pM$, die E aufspannen.

(a) Vergewissern Sie sich, dass die Definition nicht von der Wahl von u und v abhängt.

(b) Wie hängen in zwei Dimensionen Schnittkrümmung (dann auch *Gaußkrümmung* genannt), Skalarkrümmung und Riccikrümmung zusammen?

(c) Berechnen Sie die Schnittkrümmung von $\mathbb{R}^n$, S^n und hyperbolischer Ebene.
Tipp: Sie können dafür einige der Aufgaben vom letzten Blatt benutzen.