Prof. Dr. Joachim Lohkamp
Matthias Kemper

WWU Münster
WS17/18

Differentialgeometrie I

Blatt 6

Abgabe am **29.11.2017**

Aufgabe 1: Jacobifelder und Interpretation der Schnittkrümmung

Seien $p \in M$ und $v, w \in T_pM$. Dann ist $J(t) := \mathrm{dexp}_{tv}(tw) = t\mathrm{dexp}_{tv}(w)$ (mit $\mathrm{dexp}_{tv} : T_{tv}T_pM \cong T_pM \to T_{\exp(tv)}M$) bekanntlich ein Jacobi-Vektorfeld entlang der Geodäten $\gamma(t) = \exp(tv)$. Zeigen Sie:

(a) $J(0) = 0$, $\dot{J}(0) = \nabla_{\dot\gamma(0)} J = w$.

(b) Die Taylorentwicklung von $|J(t)|^2$ um $t = 0$ lautet

$$|J(t)|^2 = |w|^2 t^2 - \frac{1}{3} g(R(w, v)v, w)t^4 + \mathcal{O}(t^5) \ .$$

Berechnen Sie dazu explizit die Ableitungen und benutzen Sie die Jacobifeldgleichung $\ddot{J}(t) = R(\dot\gamma(t), J(t))\dot\gamma(t)$. Was sagt das über das Verhalten benachbarter Geodäten aus?

(c) Mit Polarisierung folgt für die Taylorentwicklung der Metrik $g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j)$ in Normalkoordinaten

$$g_{ij} = \delta_{ij} - \frac{1}{3} R_{ik\ell j}(0)x^k x^\ell + \mathcal{O}(|x|^3)$$

mit $\partial_i|_{\exp(tv)} = \mathrm{dexp}_{tv}(e_i)$ für eine Orthonormalbasis $(e_i)_i$ von T_pM.

Aufgabe 2: Volumen und Interpretation der Skalarkrümmung

Auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit M^n ist durch $\mathrm{d}V = \sqrt{|\det(g_{ij})|}\mathrm{d}x^1 \cdots \mathrm{d}x^n$ in lokalen Koordinaten ein Maß definiert (global mit einer Zerlegung der Eins). Zeigen Sie:

(a) $\mathrm{d}V$ ist von der Wahl der Koordinaten unabhängig.

(b) In Normalkoordinaten (x^i) um p gilt

$$\det(g_{ij}) = 1 - \frac{1}{3} \mathrm{Ric}_{k\ell}\, x^k x^\ell + \mathcal{O}(|x|^3)$$

mit der Ricci-Krümmung $\mathrm{Ric}_{k\ell} = g^{ij} R_{ik\ell j}$.

(c) Für das Volumen von kleinen Bällen mit Mittelpunkt p gilt

$$\mathrm{Vol}^g(B_r(p)) = \left(1 - \frac{1}{6(n+2)} \mathrm{Scal}\, r^2 + \mathcal{O}(r^3)\right) \mathrm{Vol}^{\mathrm{eucl}}(B_r(0))$$

im Vergleich zu Bällen mit demselben Radius im $\mathbb{R}^n$. $\mathrm{Scal} = g^{ij}\,\mathrm{Ric}_{ij}$ ist hier die Skalarkrümmung.

Aufgabe 3: Standardmetriken in Polarkoordinaten

Geben Sie für den $\mathbb{R}^n$, die S^n und die hyperbolischen Ebene die Metrik in normalen Polarkoordinaten (d. h. in der Form $\mathrm{d}r^2 + f(r)g_{S^{n-1}}$) an. Warum nimmt die Metrik hier diese Form an?

Für die hyperbolische Ebene können Sie benutzen, dass im Poincaré-Scheibenmodell ein geodätischer Strahl vom Ursprung zum Punkt $(x, 0)$ die Länge $2\,\mathrm{artanh}(x)$ hat.

Aufgabe 4: Flache Flächen

(a) Einen flachen Torus bekommt man, indem man aus dem euklidischen $\mathbb{R}^2$ ein Gitter (eine zu $\mathbb{Z}^2$ isomorphe Untergruppe) herausteilt. Finden Sie flache Tori, die nicht isometrisch zueinander sind.

(b) Geben Sie ein Beispiel für eine nicht vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit, deren Vervollständigung (als metrischer Raum, bezüglich der Distanzfunktion) *keine* Riemannsche Mannigfaltigkeit ist.