Prof. Dr. Joachim Lohkamp
Matthias Kemper

WWU Münster
WS17/18

Differentialgeometrie I

Blatt 5

Abgabe am **22.11.2017**

Aufgabe 1: Poincaré-Scheibe

Funktionen $f : \hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to \hat{\mathbb{C}}$ der Form $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ad - bc \neq 0$ nennt man *Möbiustransformationen.*

(a) Zeigen Sie, dass sich jede Möbiustransformation als Verkettung von Translationen, Drehstreckungen und $z \mapsto 1/z$ (Inversion am Einheitskreis + Spiegelung an reeller Achse) schreiben lässt.

(b) Folgern Sie, dass Möbiustransformationen Kreise und Geraden auf Kreise oder Geraden abbilden.

(c) Finden Sie eine Möbiustransformation φ, die die Einheitskreisscheibe auf die obere Halbebene (und $(1, \mathrm{i}, -1, -\mathrm{i})$ auf $(1, \infty, -1, 0)$) abbildet.

(d) Beschreiben Sie die Geodäten bezüglich der Pullbackmetrik $\varphi^* g_{\mathrm{hyp}}$ der hyberbolischen Metrik $g_{\mathrm{hyp}} = \frac{1}{y^2}(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2) = \frac{1}{(\operatorname{Im} z)^2}\mathrm{d}z\mathrm{d}\bar{z}$ auf der obenen Halbebene.

(e) Zeigen Sie in einem der beiden Modelle, dass die hyperbolische Ebene vollständig ist.

Aufgabe 2: Standardmetriken in Polarkoordinaten

Geben Sie für

(a) den $\mathbb{R}^n$,

(b) die hyperbolischen Ebene und

(c) die S^n

die Metrik in normalen Polarkoordinaten (d. h. in der Form $\mathrm{d}r^2 + f(r) g_{S^{n-1}}$) an.

Aufgabe 3: Infinitesimale Deformation von Metriken

Wir betrachten eine Einparameterfamilie $(g_t)_{-\epsilon<t<\epsilon}$ von Riemannschen Metriken auf einer Mannigfaltigkeit M. Wie sieht die Richtungsableitung des zugehörigen Krümmungstensors in Richtung $h := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big|_{t=0} g_t$ aus?
Hinweis: Sie können wie folgt vorgehen (lokale Koordinaten sind hier übersichtlicher):

- Die Variation der Christoffelsymbole ist

$$\delta\Gamma_{ij}^k := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} \Gamma_{ij}^k = g^{k\ell}\frac{1}{2}\left(h_{j\ell,i} + h_{i\ell,j} - h_{ij,\ell}\right) .$$

Dabei bezeichnet $h_{j\ell,i} = \partial_i h_{j\ell} - \Gamma_{ij}^k h_{k\ell} - \Gamma_{i\ell}^k h_{jk}$ die Komponenten der *kovarianten** Ableitung von h. $\delta\Gamma$ ist (im Gegensatz zu Γ) ein Tensor.

- In Koordinaten schreibt man den Krümmungstensor üblicherweise als

$$R_{ijk}^{\ell} = \mathrm{d}x^{\ell}(R(\partial_j, \partial_k)\partial_i) = \partial_j \Gamma_{ki}^{\ell} - \partial_k \Gamma_{ji}^{\ell} + \Gamma_{ki}^m \Gamma_{jm}^{\ell} - \Gamma_{ji}^m \Gamma_{km}^{\ell} \; .$$

  Zeigen Sie

$$\delta R_{ijk}^{\ell} = \delta \Gamma_{ki,j}^{\ell} - \delta \Gamma_{ji,k}^{\ell}$$

  und drücken Sie dies durch h aus.

Aufgabe 4: Bianchi-Identitäten

Ziel dieser Aufgabe ist es, zu sehen, dass die Bianchi-Identitäten eine infinitesimale Formulierung der Diffeomorphismusinvarianz des Krümmungstensors

$$R^{\varphi^* g} = \varphi^* R \tag{$\star$}$$

(vgl. Blatt 4, Aufg. 4(a)) sind.

(a) Differenzieren Sie ($\star$) nach t für eine Einparameterfamilie φ_t von Diffeomorphismen mit $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big|_{t=0} \varphi_t = V$. Werten Sie die rechte Seite mit Hilfe von Aufg. 4(c) auf Blatt 4 aus.

(b) Berechnen Sie die linke Seite mit Hilfe von Aufgabe 3. Wie sieht $h = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big|_{t=0} \varphi_t^* g$ aus? Sie sollten

$$\frac{1}{2}\left(V^m B_{kmi}^{\ell}\right)_{,j} - \frac{1}{2}\left(V^m B_{jmi}^{\ell}\right)_{,k} + V^m \left(R_{ijm,k}^{\ell} - R_{ikm,j}^{\ell}\right) \\ + V_{,k}^m R_{ijm}^{\ell} + V_{,j}^m R_{imk}^{\ell} - V_{,m}^{\ell} R_{ijk}^m + V_{,i}^m R_{mjk}^{\ell}$$

mit

$$B_{ijk}^{\ell} := R_{ijk}^{\ell} + R_{kij}^{\ell} + R_{jki}^{\ell}$$

erhalten.

(c) Aus der Gleichheit der beiden Seiten sollten Sie die Identität

$$V^m \left(R_{ijk,m}^{\ell} + R_{imj,k}^{\ell} + R_{ikm,j}^{\ell}\right) = \frac{1}{2}\left(V^m B_{kmi}^{\ell}\right)_{,j} - \frac{1}{2}\left(V^m B_{jmi}^{\ell}\right)_{,k}$$

erhalten. Folgern Sie aus geeigneten Wahlen für V zunächst die erste ($B_{ijk}^{\ell} = 0$) und dann die zweite ($R_{ijk,m}^{\ell} + R_{imj,k}^{\ell} + R_{ikm,j}^{\ell} = 0$) Bianchi-Identität.

*Diese Konvention scheint in mathematischer Literatur üblicher zu sein, während Physiker häufig $X_{i,j}$ für die (koordinatenabhängige) partielle Ableitung $\partial_j X_i$ und $X_{i;j}$ für die kovariante Ableitung benutzen.