Prof. Dr. Joachim Lohkamp
Matthias Kemper

WWU Münster
WS17/18

Differentialgeometrie I

Blatt 4

Abgabe am **15.11.2017**

Aufgabe 1: Krümmungstensor

Der Riemannsche Krümmungstensor ist definiert als

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \quad \text{für } X, Y, Z \in \Gamma(TM) \ .$$

Zeigen Sie:

(a) R ist wirklich ein (1,3)-Tensor, d. h. C^∞-linear in allen drei Komponenten,

(b) $R(X,Y)Z = -R(Y,X)Z$ und

(c) $g(R(X,Y)Z, W) = -g(R(X,Y)W, Z)$.

Aufgabe 2: Hyperbolische Ebene

Die *Poincaré-Halbebene* ist der Raum $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ mit Metrik

$$g = \frac{1}{y^2} g_{\text{eukl}} \ .$$

(a) Finden Sie hinreichend viele Isometrien, um jeden Punkt auf einen beliebigen anderen abbilden zu können (also eine transitiv wirkende Untergruppe der Isometriegruppe).

(b) Finden Sie eine Isometrie, die genau die Punkte im Abstand 1 vom Ursprung fixiert.

(c) Bestimmen Sie mit Hilfe dieser Isometrien alle Geodäten.

Aufgabe 3: Kinetische Energie

Für eine Kurve $\gamma : [a,b] \to M$ definieren wir die *Energie* als

$$E(\gamma) := \frac{1}{2} \int_a^b |\dot\gamma(t)|^2 \mathrm{d}t \ .$$

$\Omega(x,y)$ bezeichne die Menge aller differenzierbaren Kurven mit Startpunkt x und Endpunkt y. Zeigen Sie:

(a) Für eine Schar von Kurven $\gamma_s : [a,b] \to M$ mit Variationsvektorfeld $V = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\big|_{s=0} \gamma_s$ gilt

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} E(\gamma_s) = g(V, \dot\gamma_0)|_a^b - \int_a^b g(V, \nabla_{\dot\gamma_0} \dot\gamma_0) \mathrm{d}t \ ,$$

die kritischen Punkte von $E : \Omega(x,y) \to \mathbb{R}$ sind also genau die Lösungen der Geodätengleichung $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0$.

(b) $\gamma \in \Omega(x,y)$ hat genau dann minimale Energie in $\Omega(x,y)$, wenn γ proportional zur Bogenlänge parametrisiert und längenminimierend ist.

Aufgabe 4: Pullback und Lieableitung

Wir schreiben $\mathcal{T}^r_s M := \Gamma(TM^{\otimes r} \otimes T^*M^{\otimes s})$. Sei $\varphi : M \to N$ eine glatte Abbildung. Der Pullback $\varphi^* S \in \mathcal{T}_s N$ eines kovarianten Tensors $S \in \mathcal{T}_s M$ ist definiert als

$$\varphi^* S(X_1, \dots, X_s) = S(\mathrm{d}\varphi(X_1), \dots, \mathrm{d}\varphi(X_s)) \quad \text{für } X_1, \dots, X_s \in \Gamma(TM) \ .$$

Falls φ ein Diffeomorphismus ist, so ist $(\varphi_* X)(p) := \mathrm{d}\varphi|_{f^{-1}(p)}(X)$ ein Vektorfeld auf N und wir können den Pullback eines $(1, r)$-Tensors T definieren als

$$\varphi^* T(X_1, \dots, X_s) = (\varphi^{-1})_* \left[T(\mathrm{d}\varphi(X_1), \dots, \mathrm{d}\varphi(X_s)) \right] \ .$$

Zeigen Sie:

(a) Für den Krümmungstensor verhält sich *natürlich*: $R^{\varphi^* g} = \varphi^* R^g$.

(b) Ist φ_t eine Einparameterfamilie von Diffeomorphismen mit $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big|_{t=0} \varphi_t = V$, so gilt

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \varphi_t^* X = [V, X] \ .$$

(c) Allgemeiner gilt für $(1, r)$-Tensoren T

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \varphi_t^* T = \mathcal{L}_V T \ ,$$

wobei $\mathcal{L}_V$ die Lieableitung ist, die sich auf beliebige Tensoren fortsetzen lässt, indem man die Gültigkeit von $\mathcal{L}_V(T \otimes S) = (\mathcal{L}_V T) \otimes S + T \otimes (\mathcal{L}_V S)$ und $(\mathcal{L}_V \omega)(X) = \mathcal{L}_V(\omega(X)) - \omega(\mathcal{L}_V X)$ fordert.