Prof. Dr. Joachim Lohkamp
Matthias Kemper

WWU Münster
WS17/18

Differentialgeometrie I

Blatt 3

Abgabe am **8.11.2017**

Aufgabe 1: Möbiusband

Das Möbiusbündel ist der Raum $[0,1] \times \mathbb{R}/\sim$ mit der Äquivalenzrelation $(0,x) \sim (1,-x)$ für $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

(a) Mit der Projektion auf die erste Komponente ist dies ein Vektorbündel über der S^1.

(b) Das Möbiusbündel ist nicht isomorph zum trivialen Bündel $S^1 \times \mathbb{R}$.

Aufgabe 2: Isometrien

Wir betrachten die Produktmannigfaltigkeit $M = S^{n-1} \times \mathbb{R}_{>0}$ mit verschiedenen Metriken. Geben Sie die folgenden Isometrien explizit an.

(a) Mit der Produktmetrik $g_{\text{rund}} + \mathrm{d}r^2$ ist M isometrisch zum Zylinder

$$C = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \,|\, (x^1)^2 + \cdots + (x^n)^2 = 1, x^{n+1} > 0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

mit der vom umgebenden Raum induzierten Metrik.

(b) Mit der *warped product*-Metrik $g_{x,r} = r^2 g_{\text{rund},x} + \mathrm{d}r^2$ ist M isometrisch zu $(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, g_{\text{eukl}})$.

Aufgabe 3: Lie-Klammer von Vektorfeldern

Die Lie-Klammer von zwei Vektorfeldern $X, Y \in \Gamma(TM)$ ist definiert über die Wirkung als Derivation auf $f \in C^\infty(M)$:

$$[X,Y].f := X.Y.f - Y.X.f\ .$$

Zeigen Sie, dass dies tatsächlich eine Derivation (also ein Vektorfeld) ist und beweisen Sie die folgenden Eigenschaften:

(a) $[\cdot,\cdot]$ ist $\mathbb{R}$-linear in beiden Komponenten,

(b) $[X,Y] = -[Y,X]$,

(c) es gilt die Jacobi-Identität $[X,[Y,Z]] = [[X,Y],Z] + [Y,[X,Z]]$,

(d) $[X,fY] = (X.f)Y + f[X,Y]$ für $f \in C^\infty(M)$.

Aufgabe 4: Tensorielle Abbildungen

Seien $\pi_E : E \to M$ und $\pi_F : F \to M$ Vektorbündel. Zeigen Sie: Zu jeder C^∞-linearen Abbildung $T : \Gamma(E) \to \Gamma(F)$ (d. h. T ist $\mathbb{R}$-linear und $T(fs) = fT(s)$ für $f \in C^\infty(M)$, $s \in \Gamma(E)$) gibt es genau eine Bündelabbildung $\tilde{T} : E \to F$ (d. h. $\tilde{T}$ ist faserweise linear und $\pi_F \circ \tilde{T} = \pi_E$), sodass $T(s) = \tilde{T} \circ s$ für $s \in \Gamma(E)$.

Aufgabe 5: Eigenschaften des Levi-Civita-Zusammenhangs

Auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) ist der Levi-Civita-Zusammenhang ∇ durch die *Koszul-Formel*

$$2g(\nabla_X Y, Z) = X.g(Y, Z) + Y.g(Z, X) - Z.g(X, Y) - g(Y, [X, Z]) - g(Z, [Y, X]) + g(X, [Z, Y])$$

für Vektorfelder $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ gegeben. Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften:

(a) $\nabla_X Y$ ist eine kovariante Ableitung, d. h.

   (i) $\mathbb{R}$-linear in Y,

   (ii) C^∞-linear in X und

   (iii) $\nabla_X fY = f\nabla_X Y + (X.f)Y$ für $X, Y \in \Gamma(TM)$ und $f \in C^\infty(M)$.

(b) ∇ ist *torsionsfrei*, d. h. $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ für $X, Y \in \Gamma(TM)$.

(c) ∇ ist *metrisch*, d. h. $X.g(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$ für $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$.

Außerdem ist ∇ durch diese Eigenschaften schon eindeutig bestimmt.

Wenn Sie wollen, können Sie diese Aufgabe auch in Koordinaten unter Verwendung der Christoffelsymbole Γ_{ij}^k lösen.

Aufgabe 6: Zusammenhang auf Untermannigfaltigkeiten und Produkten

(a) Sei (N, h) eine Untermannigfaltigkeit von (M, g) mit der induzierten Riemannschen Metrik $h = g|_N$; die zugehörigen Levi-Civita-Zusammenhänge bezeichnen wir mit ∇^h bzw. ∇^g. Für Vektorfelder $X, Y \in \Gamma(TN)$ seien $\widetilde{X}, \widetilde{Y} \in \Gamma(TM)$ beliebige Fortsetzungen. Zeigen Sie, dass $\nabla^g_{\widetilde{X}} \widetilde{Y}$ auf N unabhängig von der Wahl der Fortsetzung ist und dass

$$\nabla^h_X Y = (\nabla^g_{\widetilde{X}} \widetilde{Y})^\top$$

gilt, wobei $^\top$ die Projektion auf TN bezeichne.

(b) Seien (M, g) und (N, h) Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit Levi-Civita-Zusammenhängen ∇^g bzw. ∇^h und $(M \times N, g + h)$ das Produkt mit zugehöriger Produktmetrik. Zeigen Sie, dass bezüglich der Zerlegung $T_{(x,y)}(M \times N) \cong T_x M \oplus T_y N$ gilt:

$$\nabla^{g+h}_{X_M + X_N}(Y_M + Y_N) = \nabla^g_{X_M} Y_M + \nabla^h_{X_N} Y_N \ .$$