Prof. Dr. Joachim Lohkamp
Matthias Kemper

WWU Münster
WS17/18

Differentialgeometrie I

Blatt 2

Abgabe am **25.10.2017**

Aufgabe 1: Tangentialräume von Untermannigfaltigkeiten

Zeigen Sie, dass man den Tangentialraum im Punkt p einer Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$, die durch eine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \supset U \to \mathbb{R}^k$ mit regulärem Wert charakterisiert ist, kanonisch mit $\ker \mathrm{d}f|_p$ identifizieren kann.

Wie kann man damit das Tangentialbündel der $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ darstellen?

Aufgabe 2: Nullstellenfreie Vektorfelder

Konstruieren Sie auf S^{2n+1} ein tangentiales Vektorfeld ohne Nullstellen.

Tipp: Betrachten Sie zunächst S^1 und verallgemeinern Sie die Konstruktion dann auf S^{2n+1}.

Aufgabe 3: Tensorprodukt und lineare Abbildungen

Seien V und W zwei endlichdimensionale $\mathbb{R}$-Vektorräume. Zeigen Sie jeweils mit und ohne Verwendung von Basen, dass

$$L(W,V) \cong V \otimes W^* \cong L_2(V^* \times W, \mathbb{R}) ,$$

wobei $L(W,V)$ die Menge der linearen Abbildungen $W \to V$ und $L_2(V^* \times W, \mathbb{R})$ die Menge der bilinearen Abbildungen $V^* \times W \to \mathbb{R}$ bezeichnet.

Aufgabe 4: Fortsetzung von Schnitten

Es sei $E \to M$ ein Vektorbündel, $p \in M$ und $v \in E_p$. Zeigen Sie, dass es einen glatten globalen Schnitt $s_v \in \Gamma(E)$ gibt mit $s_v(p) = v$. Kann im Allgemeinen ein Schnitt $s : U \to E$, der auf einer *offenen* echten Teilmenge definiert ist, glatt auf ganz M fortgesetzt werden?