

DIFFERENTIALGEOMETRIE I

Blatt 11

Zur Bearbeitung am **17.01.2018**

Aufgabe 1: Levi-Civita-Zusammenhang

Durch welche Eigenschaften ist der Levi-Civita-Zusammenhang eindeutig bestimmt?

Aufgabe 2: Bianchi-Identitäten

Zeigen Sie

$$\operatorname{div} \operatorname{Ric} = \frac{1}{2} \operatorname{grad} \operatorname{Scal} .$$

Aufgabe 3: Geodäten

γ sei eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve in einer Riemannschen Mfkt., die zwei Punkte x und y verbindet. Welche Implikationen gelten zwischen den folgenden Aussagen, welche im Allgemeinen nicht? Begründen Sie kurz.

- (a) γ ist eine Geodäte, d. h. erfüllt die Geodätengleichung.
- (b) Die Länge von γ ist gleich dem Abstand von x und y .
- (c) γ ist Geodäte und es gibt *kein* nichttriviales Jacobifeld entlang γ , das in x und einem weiteren Punkt $\neq y$ auf γ Nullstellen hat.

Aufgabe 4: Hyperbolische Ebene

Bestimmen Sie sämtliche Geodäten der hyperbolischen Ebene in einem Modell ihrer Wahl.

Aufgabe 5: Exponentialabbildung

Was besagt das Gauß-Lemma? Skizzieren Sie die wesentlichen Beweisschritte.

Aufgabe 6: Hopf-Rinow

Zeigen Sie, dass in einer vollständigen Riemannschen Mannigfaltigkeit die Heine-Borel-Eigenschaft gilt (d. h. beschränkte abgeschlossene Mengen sind kompakt).

Aufgabe 7: Jacobifelder

Wie lautet die Jacobifeldgleichung und wie lässt sie sich motivieren? Geben Sie alle Jacobifelder im flachen \mathbb{R}^n an.

Aufgabe 8: Bonnet-Myers

Was sagt der Satz von Bonnet-Myers? Beweisen Sie ihn im Fall positiver Schnittkrümmung.

Aufgabe 9: Rauchscher Vergleichssatz

Können Sie die qualitative Aussage des Rauchschen Vergleichssatzes in unter 15 Wörtern nennen?

Aufgabe 10: Krümmungsbedingungen

Gibt es auf $S^2 \times T^2$ eine Metrik mit positiver Schnitt-, Ricci-, Skalarkrümmung? Mit negativer Schnittkrümmung?

Aufgabe 11: Krümmung von Flächen

Beweisen Sie die Formel $K = -f''/f$ für die Schnittkrümmung von Rotationsflächen $(I \times S^1, g_{\text{eukl}} + f^2 g_{S^1})$, I Intervall.